Istituzioni di Algebra Superiore, 2022-2023

Pagina web del corso:
www.mat.uniroma1.it/people/pezzini/didattica/IALS2223/IstAlSup2223.html

Email: pezzini@mat.uniroma1.it
Ufficio: Dip. Mat., stanza n. 11 (piano terra)

Altre informazioni:

1. Ricevim. studenti: DA FISSARE, sarà online
2. Esame: scritto + orale
3. Fogli settimanali di esercizi
4. Libri: Hall per Gruppi di Lie, Humphreys per alg. di Lie.
   NON E' ASSOLUT. NEC. COMPRARLI.
   Del libro di Hall faremo poco, dell'Humphreys circa 2/3.
5. Diario delle lezioni, giornaliero sul sito.
6. Corsi vecchi: /people/pezzini/teaching.html
   att.: alcune cose sono diverse.

Prerequisiti: 1. Algebra lineare molto bene.

Durante il corso useremo talvolta argomenti di algebra lineare forse non visti prima: faremo delle parentesi per vederli bene qui.

2. Topologia:
- concetti base (aperti, chiusi, topologia di sottospazio, connessione, componenti connesse, topologia prodotto)
- topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$
- varietà differenziabili immerse in $\mathbb{R}^n$ (solo la def.)

3. Analisi in più variabili (pochissimo: funzioni C^∞ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, serie di potenze).

INTRODUZIONE

Gruppi di Lie: struttura di gruppo + str. di var. differenziabile (reale o compl.)

+ compatibilità (= moltipl. $G \times G \to G$ e inversa $G \to G$ sono C^∞)

Algebre di Lie: spazio vettoriale L con „operazione" $L \times L \to L$

bilineare non necess. associativa + assiomi

I gruppi di Lie emergono naturalmente, come gruppi molto noti di matrici, oppure gruppi di „simmetrie" di var. differenziabili.

ES.: 1) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$, $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \times)$, $(S^1$, „somma degli angoli"$) =$

$= (S^1 \subseteq \mathbb{C}, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$

2) ($F = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$) (I_n = matrice identità)

$GL(n, F)$, $SL(n, F) = \{A \in GL(n, F) \mid \det(A) = 1\}$

$O(n, F) = \{A \in GL(n, F) \mid A \cdot {}^tA = I_n\}$

$Sp(n, F) = \{A \in GL(n, F) \mid A J_n {}^tA = J_n\}$
(n pari)

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & -1 & & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

O ed Sp emergono naturalmente come i sgr di $GL(n, F)$ che preservano le forme bil. non deg. di matrici I_n e J_n (su $\mathbb{R}$ quella di I_n è il prod. scalare standard).

Oss.: Sono oggetti interessanti in sé, e utili in geometria se emergono come gruppi di simmetrie di var. diff., perché la geom. del gruppo influenza la geom. della varietà.

Algebre di Lie: Sono emerse storicam. come spazio tangente all'elem. neutro e_G di un gruppo di Lie. L'operazione, chiamata bracket (di Lie), deriva dall'operaz. di gruppo.

Successivam. sono state applicate in molti ambiti, anche senza che i gruppi fossero coinvolti, ad es. in geom. algebrica (teoria delle def.), topologia (teoria dei nodi), e soprattutto fisica matematica (spesso qui hanno dim. infinita!)

Es.: Consid. $G = GL(n, F)$, è un *aperto* di

$$M_n(F) = \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \\ M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2n^2} \end{cases}$$

, il suo sp. tangente in $I_n = e_G$ è semplicem. $M_n(F)$. Il bracket è

$$\begin{aligned} M_n(F) \times M_n(F) &\longrightarrow M_n(F) \\ (A, B) &\longmapsto [A, B] = AB - BA \end{aligned}$$

Con quest'operazione, $M_n(F)$ si denota con $\mathfrak{gl}(n, F)$.
In questo caso non è *né commutativa*, *né associativa* (!)

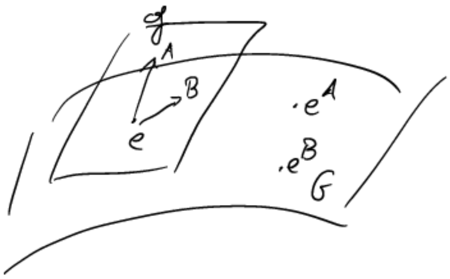
Gruppo e algebra sono strettamente legati, tramite la <u>mappa esponenziale</u>.

Infatti dato $G \subseteq GL(n, F)$ e $\mathfrak{g} = T_e G$, possiamo esponenziare tutte le matrici di $\mathfrak{g}$ e otteniamo elem. di G (non è ovvio!). Inoltre, $A \mapsto e^A$ è un diffeom. fra un intorno U di $0 \in \mathfrak{g}$ e un int. V di $I_n \in G$ (ancor meno ovvio!):

Infine, l'operaz. di G "in V" è <u>determinata</u> dal bracket "in U":
(sempre meno ovvio....).

date $A, B \in U \subseteq \mathfrak{g}$

$$e^A \cdot e^B = e^{\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[A,B]] + \dots\right)}$$



Questo funziona solo vicino a $0 \in \mathfrak{g}$ e vicino a $I_n \in G$, ma è utilissimo perché proprietà algebriche di $\mathfrak{g}$ inducono proprietà alg. di G, e in questo modo molti problemi su G si risolvono traducendoli in problemi su $\mathfrak{g}$, cioè si <u>linearizzano</u>! Att: si è tentati di pensare che il bracket su $\mathfrak{g}$ sia un po' come un'approssimaz. al prim'ordine del prodotto di G, ma non è proprio così: la formula col bracket descrive <u>esattam.</u> l'op. di G, almeno vicino a e_G!

Attenzione: Nel corso *non* considereremo gr. di Lie *qualsiasi* (verrebbe troppa geom. differenziale...)

Considereremo solo gruppi di Lie *di matrici*, cioè sottogruppi/sottovarietà di $GL(n, F)$.

E' una classe importante di gruppi di Lie, e ha il vantaggio che alcune cose si semplificano. Non tutti i gruppi di Lie sono gr. di Lie di matrici, ad es.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{non lo è}$$

$$\uparrow \text{ cioè } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}) \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

è un gruppo di Lie (si può dimostrare) ma non è isomorfo ad alcun gruppo di Lie di matrici.

PARTE PRIMA: GRUPPI DI LIE (DI MATRICI)

DEFINIZIONI E PRIME OSSERVAZIONI

Def.: Un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico, e tale che l'operaz. di gruppo $\begin{matrix} G\times G \to G \\ (g,h)\mapsto gh \end{matrix}$ e l'inverso $\begin{matrix} G \to G \\ g \mapsto g^{-1} \end{matrix}$ sono funzioni continue.

Esempi: 1. Gli esempi visti prima sono chiaramente tutti gruppi topologici.

2. $(\mathbb{Q},+)$ con top. euclidea è un gruppo topologico ma non una var. diff.

Oss.: Sia $g\in G$. Allora sono definite la traslazione a sinistra e a destra per g:

$$L_g : \begin{matrix} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gx \end{matrix} \quad , \quad R_g : \begin{matrix} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto xg \end{matrix}$$

Es.: 1) $G=(\mathbb{R},+)$, $L_g : \begin{matrix} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 1+x \end{matrix}$ con $g=1$ $\quad R_g : \begin{matrix} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x+1 \end{matrix}$

(qui $L_g = R_g$)

2) $G = GL(2,\mathbb{R})$ $\qquad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$L_g : \begin{matrix} GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \end{matrix}$$

L_g = scambiare le righe

$$R_g : GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$ cioè R_g = scambiare le colonne, e oss. qui $R_g \neq L_g$

Oss.: ancora su L_g, R_g.

Sono applicazioni continue, vediamo la dim. per L_g. Definiamo

$$\tilde{m} = m\Big|_{\{g\}\times G} : \{g\}\times G \longrightarrow G \qquad \text{è continua}$$
$$(g,x) \longmapsto gx$$

inoltre $\{g\}\times G$ è omeomorfo a G tramite la proiezione

$$\{g\}\times G \longrightarrow G \quad , \quad \text{che ha inversa} \quad G \xrightarrow{\psi} \{g\}\times G$$
$$(g,x) \longmapsto x \qquad\qquad x \longmapsto (g,x)$$

e abb.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend left, "L_g"] & \{g\}\times G \arrow[r, "\tilde{m}"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] & (g,x) \arrow[r, mapsto] & gx \end{tikzcd}$$

cioè $L_g = \tilde{m}\circ\psi$

quindi L_g è continua. Analogo ragionam. con R_g.

Inoltre L_g e R_g sono omeom., perché hanno inverse $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$, $R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}$, infatti

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L_g"] & G \arrow[r, "L_{g^{-1}}"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] & gx \arrow[r, mapsto] & g^{-1}(gx)=x \end{tikzcd}$$

cioè $L_{g^{-1}}\circ L_g = Id_G$

e le altre verifiche sono analoghe.
Segue che il coniugio per g, $\gamma_g : \begin{matrix} G \to G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{matrix}$ è un omeomorfismo, perché $\gamma_g = L_g\circ R_{g^{-1}}$

Oss.: Se G è un gruppo topologico e H è un sgr, allora possiamo mettere su H la top. di sottospazio, e H con essa è un gruppo topologico (esercizio).

Def.: Sia G un gruppo topologico, e $H\subseteq G$ un sgr *chiuso*. Allora H si dice anche *sottogruppo topologico*. Nel corso però diremo di solito semplicemente *sottogruppo chiuso*.

Es.: I gruppi di matrici visti prima sono sgr chiusi di $GL(n, F)$, perché sono dati da equazioni che def. chiusi, ad es. SL è dato dall'eq. $\det(A)=1$.

Può essere anche che un sgr di G sia <u>aperto</u>.

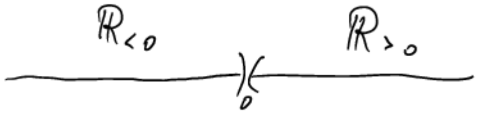
<u>Esempi</u>: 1) Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ un gruppo <u>finito</u>, ad es.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{R}).$$ Allora la topologia su G è <u>discreta</u> (= i punti sono s.in. aperti);

e $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è aperto in G

$$\text{distanza} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \\ = \sqrt{4} = 2$$

2) $G = \mathbb{R}_{\neq 0}$



(con la moltiplicaz. usuale)

$$G = \underbrace{\mathbb{R}_{>0}}_{\shortparallel} \cup \mathbb{R}_{<0}$$

H = sottogruppo aperto e chiuso! Infatti

$$H = \underbrace{G \cap \left]0,+\infty\right[}_{\uparrow \Rightarrow H \text{ aperto in } G} = \underbrace{G \cap \left[0,+\infty\right[}_{\uparrow \Rightarrow H \text{ chiuso in } G}$$

Prop.: Sia H un sgr di un gr. top. G. Se H è aperto, allora è anche chiuso.

Dim.: $G = \bigcup_{gH \in G/H} gH$ (unione disgiunta delle classi lat. sinistre, ricordiamo $gH \cap g'H = \begin{cases} gH & \text{opp.} \\ \emptyset \end{cases}$)

Ora $gH = L_g(H)$, quindi gH è aperta $\forall g$.

Poi $G \setminus H$ è l'unione delle cl. lat. sin. diverse da H, quindi $G \setminus H$ è aperto, e H è chiuso. □

Prop.: Sia G gr. topol., e G^0 la componente connessa contenente l'elem. neutro $e \in G$. Allora G^0 è un sgr *normale* chiuso di G.

Dim.: Le comp. connesse sono sempre chiuse. Verif. che G^0 è un sgr. Se $h \in G^0$ allora $h \cdot G^0 = L_h(G^0)$ è una comp. connessa di G, e interseca G^0 perché $h \cdot G^0 \ni h \cdot e = h$, quindi $G^0 \cap h G^0 \ni h$. Segue $G^0 = hG^0$, cioè il prodotto di elem. di G^0 sta in G^0. Segue anche che $e \in hG^0$, cioè c'è un elem. $k \in G^0$ tale che $e = hk$. Ma allora k è h^{-1}, cioè $h^{-1} \in G^0$ $\forall h \in G^0$. Allora G^0 è un sgr. Sia ora $g \in G$ e consid. gG^0g^{-1}, è uguale a $L_g(R_{g^{-1}}(G^0)) = \gamma_g(G^0)$, e sappiamo che γ_g è un omeom., quindi $\gamma_g(G^0)$ è una comp. connessa. Inoltre $\gamma_g(G^0) \ni e$, perciò $\gamma_g(G^0)$ interseca G^0, e allora $\gamma_g(G^0) = G^0$.

Segue: G^0 è normale. □

Def.: Un *omomorfismo di gruppi topologici* $f: G \to G'$ è un om. di gruppi che è anche continuo. Un *isom. di gr. topol.* è un isom. di gruppi che è un omeomorfismo (questo è equivalente a dire che f è omom. di gruppi top. *biiettivo*, e f^{-1} è anch'essa omom. di gruppi topologici).

Anche qui, nel corso useremo spesso semplicem. la terminologia *omomorfismo continuo*.

Es.: 1) $G = (\mathbb{R}, +)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ $\quad$ è un omomorfismo continuo

↑ $\left(f(x+y) = -x-y = f(x) + f(y) \right)$

(att.: in generale $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ *non* è un omomorfismo! lo è se e solo se G è abeliano)

2) $G=(\mathbb{R},+)$

Scegliamo una base $\mathcal{B}=(b_i)_{i\in I}$ di $\mathbb{R}$ come sp. vett. su $\mathbb{Q}$, cioè ogni reale x si scrive come comb. lin. dei b_i a coeff. in $\mathbb{Q}$:

$x = \alpha_1 b_{i_1}+\dots+\alpha_n b_{i_n}$ ($n, i_1,.., i_n$ dipendono tutti da x)

Definiamo
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto \alpha_1+\dots+\alpha_n$$

Allora $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{Q}$ quindi f non è continua, ma f è un omomorfismo (= è additiva).

(Curiosità: ogni applicazione additiva e non continua $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ha il grafico denso in $\mathbb{R}^2$!).

3) $G=GL(n,\mathbb{R})$ $\quad f(A)={}^tA^{-1}$ è un isomorfismo di gruppi topologici.

MAPPA ESPONENZIALE

Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^{n^2}$ si scrive facilmente in termini di matrici:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

come vettori sarebbero $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$.

Il prod. scalare è $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \dots + a_{n1}b_{n1} + \dots + a_{nn}b_{nn}$,

ed è anche uguale a $tr(A \cdot {}^tB)$. Infatti

$$A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{jk}}_{\substack{\nwarrow \text{ in } A \cdot B \\ \text{sarebbe } b_{kj}}}$$

$$tr(A \cdot {}^tB) = c_{11} + \dots + c_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{1k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{2k} + \dots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{nk}$$

che è proprio il prodotto scalare. Lo stesso ragionam. vale con $M_n(\mathbb{C})$, usando $tr(A\, {}^t\bar{A})$. Proseguiamo su $\mathbb{C}$, i ragionam. valgono anche su $\mathbb{R}$.

La norma corrispondente $\|A\| = \sqrt{tr(A \cdot {}^t\bar{A})}$ (è quella solita in $\mathbb{C}^{n^2}$) soddisfa

1) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$, $\quad \|cA\| = |c| \cdot \|A\|$

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$
$\forall c \in \mathbb{R}$

2) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

3) $\|A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. fra} \\ \text{matrici}}}{\cdot} B\| \le \|A\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. in } \mathbb{R}}}{\cdot} \|B\|$

È da verificare 3), e per questo osserviamo che

$$\|A \cdot B\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\text{elt. } (i,j) \text{ di } A \cdot B|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \underset{\substack{\nwarrow \text{ dis. triangolare} \\ \text{in } \mathbb{C}^n}}{\le}$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{ik} b_{kj}|\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|\cdot|b_{kj}|\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy - Schwarz in } \mathbb{R}^{2m}}}{\le} \sum_{i,j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} |b_{kj}|^2\right) =$$

$$= \underset{i=1}{\left(|a_{11}|^2+|a_{12}|^2 \dots\right)} \underset{j=1}{\left(|b_{11}|^2+|b_{21}|^2+\dots\right)} + \underset{i=2}{\left(|a_{21}|^2+|a_{22}|^2+\dots\right)} \underset{j=1}{\left(|b_{11}|^2+|b_{21}|^2+\dots\right)} + \dots$$

raccolgo quelle con lo stesso j

$$= \left(\sum_{i,k=1}^{m} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |b_{k\underset{\substack{\uparrow \\ j=1}}{1}}|^2\right) + \left(\quad\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |b_{k\underset{\substack{\uparrow \\ j=2}}{2}}|^2\right) + \dots =$$

$$= \left(\sum_{i,k=1}^{m} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k,j=1}^{m} |b_{kj}|^2\right) = \|A\|^2\cdot\|B\|^2$$ quindi 3) è verificata.

Definiamo ora <u>funzioni di matrici a valori matrici</u>, usando serie convergenti.

Lemma

Sia $a: \mathbb{Z}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$, $m \mapsto a_m$ una successione tale che $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| r^m < +\infty$ per un $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Allora $f(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m$ è una matrice ben def. $\forall X \in B(0, r)$ = palla ap. di raggio r e centro $0 \in M_n(\mathbb{C})$, e definisce una funzione continua $B(0,r) \to M_n(\mathbb{C})$

Dim.: Dimostriamo che la succ. delle somme parziali è di Cauchy: dati $\ell > k$ abb.

$$\left\|\sum_{m=0}^{\ell} a_m X^m - \sum_{m=0}^{k} a_m X^m\right\| = \left\|\sum_{m=k+1}^{\ell} a_m X^m\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{m=k+1}^{\ell} |a_m|\cdot\|X^m\| \leq \sum_{m=k+1}^{\ell} |a_m|\cdot\|X\|^m \leq \underbrace{\sum_{m=k+1}^{\ell} |a_m|\cdot r^m}_{\text{distanza fra due termini della succ. convergente}}$$

$$N \longmapsto \sum_{m=0}^{N} |a_m| r^m$$

Quindi $f(X)$ è ben definita, e la serie converge uniformemente risp. a X, per cui f è continua. $\square$

Definizione: Definiamo l'esponenziale e il logaritmo di matrici:

$$e^X = \exp(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} X^m,$$

$$\log(I_n + X) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} X^m,$$

L'esp. converge (nel senso del lemma) per tutte le $X \in M_n(\mathbb{C})$ e log converge (nel senso del lemma) se $\|X\| < 1$, quindi questo definisce applicazioni continue

$$\exp: M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}),$$

$$\log: B(I_n, 1) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}).$$

Oss.: 1) Se $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ commutano $(XY = YX)$ allora

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

e si ottiene la solita formula $e^X e^Y = e^{X+Y}$.

Attenzione: se $XY \neq YX$ può verificarsi $\boxed{e^{X+Y} \neq e^X e^Y \ !!}$

ad es. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, verifica per esercizio.

2) Dato che X e $-X$ commutano, allora $e^X e^{-X} = e^{X-X} = e^0 = I_n$

cioè e^X è una matrice invertibile, con inversa e^{-X}. Allora

in realtà l'immagine di exp è cont. in $GL(n, \mathbb{C})$, e scriviamo

anche $\exp: M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$.

3) Se $C \in GL(n, \mathbb{C})$ allora $C e^X C^{-1} = e^{CXC^{-1}}$, basta

osservare che

$$C \left(\sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} X^m \right) C^{-1} = \sum_{m=0}^{m} \frac{1}{m!} \left(CXC^{-1} \right)^m.$$

Obiettivo: dimostrare che $e^{\log(X)} = X$ e $\log(e^X) = X$ (sotto certe ipotesi!).

Serve prima una parentesi di algebra lineare.

Parentesi di algebra lineare

Prop.: Le matrici diagonalizzabili $n \times n$ sono dense in $M_n(\mathbb{C})$, cioè data $A \in M_n(\mathbb{C})$ qualsiasi, esiste una succ. di matrici diagonalizzabili che converge ad A.

Per la dim.:

Lemma: Ogni matrice in $M_n(\mathbb{C})$ è simile ad una matrice triangolare superiore.

Dim. lemma: Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Il suo pol. caratteristico ha radici (siamo su $\mathbb{C}$), quindi A ha almeno un autovettore $v_1 \in \mathbb{C}^n$.

Completiamo v_1 ad una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{C}^n$, e consid. l'appl. lineare $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ che ha A come matrice canonica. Nella base $\mathcal{B}$, l'applicazione f ha matrice

$$C = \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \begin{matrix} * & \cdots & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{matrix}}}_{A'} \end{array}\right), \quad \text{cioè } A \text{ è simile a } C. \quad (\lambda_1 = \text{autovalore di } v_1)$$

Cancellando la prima riga e la prima colonna di C otteniamo $C' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, che per induzione è simile ad una matrice triang. sup.:

$$\begin{pmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix} = \underset{\underset{GL(n-1,\mathbb{C})}{\cap}}{M} \cdot C' \cdot M^{-1}. \quad \text{Segue:}$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{M} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \begin{matrix} * & \cdots & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{C'} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{M^{-1}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \begin{matrix} * & \cdots & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{matrix}} \end{array}\right)$$

Cioè C è simile ad una matr. triang. sup.. $\square$

Dim. prop.: Sia $C = MAM^{-1}$ con C triang. sup. e $M \in GL(n,\mathbb{C})$.

Allora

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autoval. di C (e di A).

Se sono tutti distinti, C ed A sono diagonalizzabili. Altrimenti costruiamo una sequenza di matrici $C^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} C$ con $C^{(k)}$ uguale a C tranne che sulla diagonale:

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

e i numeri sulla diagonale tali che $\lambda_i^{(k)} \neq \lambda_j^{(k)}$ $\forall i \neq j$, e $\lambda_i^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_i$

es.: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{(k)} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{k} & 1 \\ 0 & 1+\frac{1}{k} \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$

Poniamo $A^{(k)} = M^{-1}C^{(k)}M$. Abb.: $C^{(k)} \to C$, quindi $A^{(k)} \to M^{-1}CM = A$, inoltre $C^{(k)}$ è diagonalizz. $\forall k$ e allora anche $A^{(k)}$. $\square$

Fine parentesi di algebra lineare

Oss: 1) Se A è diagonalizzabile, mettiamo $A = C D C^{-1}$ con $C \in GL(n)$ e $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, allora calcolare

e^A è semplice, basta osservare che

$$e^A = e^{CDC^{-1}} = C e^D C^{-1} = C \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} C^{-1} =$$

$$= C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} C^{-1}$$

2) Se A è nilpotente ($A^k = 0$ per k abbastanza grande) allora e^A è una somma finita.

3) Vedremo in seguito come usare queste due cose per calcolare praticamente e^A $\textcircled{\forall A}$.

Teorema: 1) Per ogni $g \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $\|g - I_n\| < 1$ vale

$$e^{\log(g)} = g$$

$\left(\text{oss.: } \log(g) = \log(I_n + \underset{g - I_n}{\underset{\shortparallel}{X}}) \text{ è ben def.}\right)$

2) Per ogni $X \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $\|X\| < \log 2$ vale

$\|e^X - I_n\| < 1$, e

$$\log(e^X) = X$$

Dimostrazione

1) Supponiamo prima di tutto che g sia diagonalizzabile:

$$g = CDC^{-1} \qquad \text{con } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda_i = \text{autovalori di } g).$$

Allora $\lambda_i - 1$ sono gli autovalori di $X = g - I_n$. Dal fatto che $\|X\| < 1$ segue che $|\lambda_i - 1|$ (esercizio: il modulo di ciascun autovalore è $\leq$ della norma della matrice, v. dopo questa dim.).

Allora

$$\log(g) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} X^m = C \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (\lambda_1 - 1)^m & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (\lambda_n - 1)^m \end{pmatrix} C^{-1} =$$

$$= C \begin{pmatrix} \log(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \log(\lambda_n) \end{pmatrix} C^{-1}$$

e allora

$$e^{\log(g)} = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1} = g$$

Se invece g non è diagonalizzabile, allora usiamo la densità delle matrici diagonalizzabili e la continuità di log ed exp.

2) Sia X con $\|X\| < \log(2)$, allora

$$\|e^X - I_n\| = \left\| \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} X^m \right\| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \|X\|^m = e^{\|X\|} - 1 < 1 ,$$

La dim. dell'uguaglianza è analoga a quella in 1). □

Esercizio: Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di $A \in M_n(\mathbb{C})$, allora $|\lambda| \leq \|A\|$.

Svolgimento: Sia v autovettore, e $B = \begin{pmatrix} \boxed{v} & \cdots & \boxed{v} \end{pmatrix}$,

allora $A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda v} & \cdots & \boxed{\lambda v} \end{pmatrix}$

$$\|A \cdot B\|^2 = n \cdot |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2$$

$$\|B\|^2 = n \|v\|^2$$

e la disuguaglianza voluta segue da $\|A \cdot B\|^2 \leq \|B\|^2 \cdot \|A\|^2$, cioè

$$\cancel{n} \cdot |\lambda|^2 \cdot \cancel{\|v\|}^2 \leq \cancel{n} \cancel{\|v\|}^2 \cdot \|A\|^2 . \qquad \square$$

L'esponenziale su $M_n(\mathbb{R})$

Chiaramente exp e log sono definiti su $M_n(\mathbb{R})$ come restrizioni delle funzioni già viste su $M_n(\mathbb{C})$.

Proposizione: Le componenti di $\exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, viste come funzioni $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, sono serie di potenze nelle entrate della matrice, con dominio di convergenza $M_n(\mathbb{R})$, in particolare sono C^∞.

Dim.: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'entrata $(A^m)_{ij}$ di A^m è un polinomio omogeneo di grado m nelle entrate di A (dim.: esercizio)

quindi la scrittura
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{entrata} \\ \text{riga } i \text{ colonna } j}}{\exp(A)_{ij}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}(A^m)_{ij}$$
è già un'espressione

dell'entrata $\exp(A)_{ij}$ come serie di potenze in più variabili (= le entrate di A). Abbiamo già dimostrato che la serie converge $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$; inoltre per risultati standard di analisi $\exp(A)_{ij}$ è C^∞, e le derivate parziali si calcolano differenziando gli addendi della serie. $\square$

Sottogruppi a un parametro

<u>Lemma</u>: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, consid. la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$

E' una funzione C^∞, e vale

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0} = A$$

<u>Dim.</u>: Le entrate di e^{tA} nella variabile t sono serie di potenze con raggio di convergenza infinito, quindi basta derivare termine a termine. $\square$

Corollario: Il differenziale in $0 \in M_n(\mathbb{R})$ di $\exp$ è l'identità, cioè la matrice Jacobiana calcolata in 0 è la matrice identità.

Dim.: Calcoliamo le derivate parziali usando le curve $\alpha_{ij} : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto tE_{ij}$,

e la solita identificazione $M_n(\mathbb{R}) \leftrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, $E_{11} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ecc...

cioè vediamo $\exp$ come f.ne $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$. Allora

$e^{tE_{11}} = \exp(t, 0, \dots, 0)$, e l'uguaglianza $\left(\frac{d}{dt} e^{tE_{11}}\right)\Big|_{t=0} = E_{11}$

vuol dire

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \exp(t, 0, \dots, 0)\Big|_{t=0} = \dots$$

ma ricordiamo

$$\dots = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobiana}}}{J\exp}\Big|_0 \cdot J\big(t \mapsto (t, 0, \dots, 0)\big) = J\exp\Big|_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e analogam. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = J\exp\Big|_{t=0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ecc...,

segue $J\exp\Big|_0 = I_{n^2}$.

$\square$

Oss.: La funzione e^{tA} è anche un omomorfismo di gruppi $\mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ perché tA e sA commutano, per cui

$$e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA} e^{sA} .$$

Si chiama anche il sottogruppo a un parametro generato da (o associato ad) A.

Teorema: Sia $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ omomorfismo continuo.

Allora esiste unica $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\varphi(t) = e^{tA} \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Dim.: L'unicità è chiara dal lemma precedente, dim. che A esiste.

L'idea è quella di prendere $A = \log(\varphi(1))$, ma c'è il problema che $\varphi(1)$ potrebbe essere troppo lontano da I_n per poter fare il log.

(Idea alternativa: si può ricostruire a posteriori A come $\left.\frac{d}{dt}\varphi(tA)\right|_{t=0}$, ma nessuno ci assicura che $\varphi(tA)$ sia derivabile!)

Osserviamo il fatto seguente: φ può venire "riscalata a piacere" con un coeff. $\varepsilon > 0$, cioè ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon : \mathbb{R} &\to GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto \varphi(\varepsilon t) \end{aligned}$$

abb. che anche φ_ε è un omomorfismo continuo, e $\varphi(t) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ $\forall t$.

D'altronde, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varphi_\varepsilon(]-2, 2[) \subseteq \exp(B(0,r))$ con $r = \frac{\log(2)}{2}$, perché dal teorema prec. exp è biiettiva da $B(0,r)$ alla sua immagine $\exp(B(0,r))$ (con inversa $= \log$) e questi insiemi sono entrambi aperti.

Sia allora $X = \log(\varphi_\varepsilon(1))$ $(\|X\| < r)$ e prendiamo anche $Z = \log\left(\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ $(\|Z\| < r)$. Segue

$$\varphi_\varepsilon(1) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = e^Z \cdot e^Z = e^{2Z}$$

cioè $e^{2Z} = e^X$, e visto che $\|2Z\| < \log(2)$ (qui si usa la scelta $r = \frac{\log(2)}{2}$) allora $2Z = \log\left(e^{2Z}\right) = \log\left(e^X\right) = X$.

Concludiamo che $\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}X}$.

Ripetiamo lo stesso ragionam. con $\frac{1}{4}X$ e $\frac{1}{2}X$ al posto di $\frac{1}{2}X$ e X, ecc..., ottenendo

$$\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2^k}\right) = e^{\frac{1}{2^k}X} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Sia ora $a \in [0,1[$ e consid. la sua scrittura in base 2:

$$a = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \dots + \frac{1}{2^k}a_k + \dots$$

con $a_i \in \{0,1\}$ $\forall i$.

Abb.:

$$\varphi_\varepsilon(a) = \varphi_\varepsilon\left(\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \dots + \frac{1}{2^k}a_k\right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \varphi_\varepsilon(\text{—}) = \lim_k \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1} \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{4}\right)^{a_2} \cdots \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2^k}\right)^{a_k} =$$

$$= \lim_k \left(e^{\frac{1}{2}X}\right)^{a_1} \cdots \left(e^{\frac{1}{2^k}X}\right)^{a_k} = \lim_k e^{\left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_k}{2^k}\right)X} = e^{\lim_k\left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_k}{2^k}\right)X} =$$

$$= e^{aX}.$$

Inoltre $\varphi_\varepsilon(-a) = \varphi_\varepsilon(a)^{-1} = \left(e^{aX}\right)^{-1} = e^{-aX}$. Infine, dato $a \in \mathbb{R}$ scelgo $k \in \mathbb{Z}$ con $k > |a|$ e scriviamo

$$\varphi_\varepsilon(a) = \varphi_\varepsilon(a/k)^k = \left(e^{\frac{a}{k}X}\right)^k = e^{aX}$$

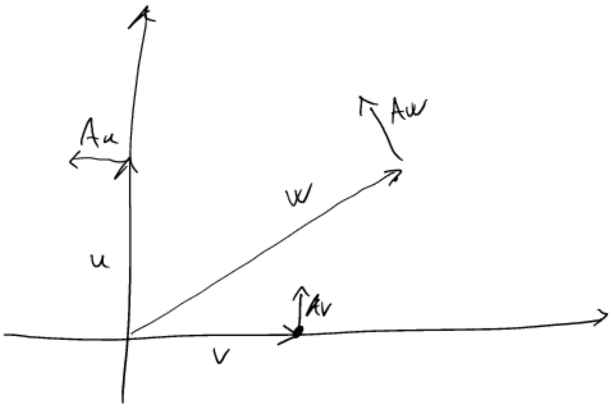
Quindi φ_ε è il sgr a un parametro ass. ad X. Basta porre allora $A = \frac{1}{\varepsilon}X$ e abb. $\varphi(t) = \varphi_\varepsilon(t/\varepsilon) = e^{\frac{t}{\varepsilon}X} = e^{tA}$. $\square$

<u>Esempi</u>:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix}0&-t\\t&0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$$

Spiegazione intuitiva: $A=\begin{pmatrix}0&-t\\t&0\end{pmatrix}$ può essere interpretato come un campo vettoriale



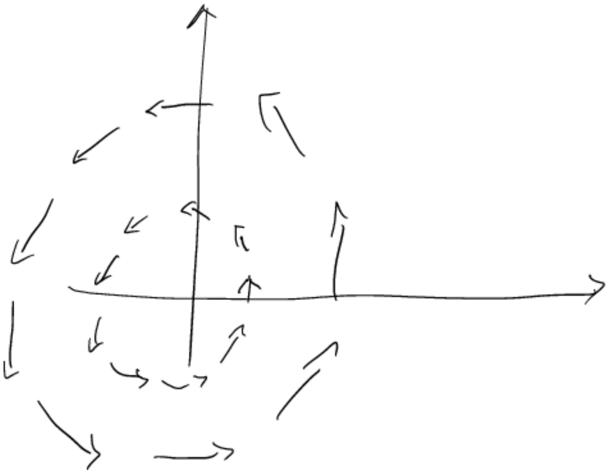
che nel punto $v\in\mathbb{R}^2$ dà il vettore Av, immaginato „applicato" al punto v.

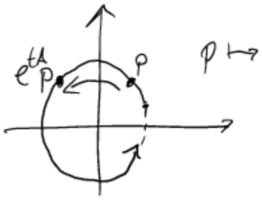
Questo corrisponde all' omom. continuo

$$\mathbb{R}\to GL(2,\mathbb{R})$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix} = e^{tA}$$

che possiamo interpretare come un „flusso" sul piano





$p \mapsto e^{tA}p$

Se lo deriviamo in $t=0$ otteniamo proprio A.

Esempio: Sia $\varphi: \mathbb{R}\to GL(n,\mathbb{R})$ un sottogruppo a un parametro.

L'immagine è un sottogruppo di $GL(n,\mathbb{R})$, ma non è detto che sia un sottogruppo chiuso!

Consid. ad esempio $v\in\mathbb{R}^2$, $v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ e

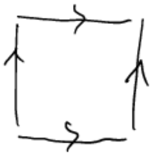
$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow GL(4,\mathbb{R})$$

$$t \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc}\cos(at) & -\sin(at) & 0 & 0\\ \sin(at) & \cos(at) & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \cos(bt) & -\sin(bt)\\ 0 & 0 & \sin(bt) & \cos(bt)\end{array}\right)$$

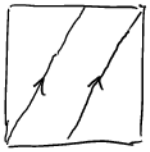
Se $v \in \mathbb{Q}^2$ (opp. se $b \neq 0$ e $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) allora $\mathrm{Im}(\varphi)$ è un sottogruppo chiuso. Ma se $b \neq 0$ e $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, allora $\mathrm{Im}(\varphi)$ non è chiuso.

Verifica: osserviamo che $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \left(\begin{array}{c|c} SO(2,\mathbb{R}) & 0 \\ \hline 0 & SO(2,\mathbb{R}) \end{array}\right) = H$ che è un sgr chiuso di $GL(4,\mathbb{R})$. Inoltre $H \cong S^1 \times S^1$ = toro

=



, e $\mathrm{Im}(\varphi)$ è una retta che si "avvolge" sul toro:



Se il coeff. angolare è irrazionale, $\mathrm{Im}(\varphi)$ è densa nel toro, "non si richiude mai su se stessa".

Prossimo obiettivo: definire l'algebra di Lie di un sottogruppo chiuso $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$. Servirà a dim. che G è una sottovarietà.

Algebre di Lie: definizioni

In questa sezione k è un campo qualsiasi.

Def.: Sia L uno sp. vett. su k, e

$$\begin{aligned} L \times L &\longrightarrow L \\ (x, y) &\longmapsto [x, y] \end{aligned}$$

un'applicaz. chiamata bracket. Allora L si dice algebra di Lie se

1) il bracket è bilineare,

2) vale $[x, x] = 0 \quad \forall x \in L$

3) vale l'identità di Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in L.$$

Oss.: Dati $x, y \in L$ abb. $0 = [x+y, x+y] = \cancel{[x, x]} + [x, y] + [y, x] + \cancel{[y, y]}$

da cui $[x, y] = -[y, x]$

Esercizio. Viceversa, se char $k \neq 2$ e $[x, y] = -[y, x] \ \forall x, y \in L$

allora $[x, x] = 0 \quad \forall x \in L$.

Oss.: Ricordiamo la seguente terminologia generale:

Un'algebra è uno sp. vettoriale A dotato di un'appl. bilineare $A \times A \longrightarrow A$.

Un'algebra A si dice associativa se l'appl. bilineare data è associativa (nel senso usuale), e in tal caso si chiama prodotto, perché con la somma in A (come sp. vett.) rende A un anello (La distributività segue dalla bilinearità.)

Es.: $M_n(k)$ è un'algebra associativa, prendendo il prodotto usuale di matrici.

Torniamo alle algebre di Lie.

Esempi: 1) Sia L sp. vett. qualsiasi, e poniamo $[x,y]=0$ $\forall x,y\in L$.

Questa L è un'alg. di Lie, si chiama abeliana o commutativa.

2) $L = M_n(k)$, $[X,Y] = XY - YX$.

E' un'alg. di Lie: 1) bilinearità: facile

2) $[X,X]=0$ ovvio

3) verifica:

$$[X,[Y,Z]] = X(YZ-ZY) - (YZ-ZY)X =$$

$$= XYZ - XZY - YZX + ZYX$$

$$[\ ,[\ ,\ ]]+[\ ,[\ ,\ ]]+[\ ,[\ ,\ ]] = \cancel{XYZ} - \cancel{XZY} - \cancel{YZX} + \cancel{ZYX} +$$

$$+ \cancel{YZX} - \cancel{YXZ} - \cancel{ZXY} + \cancel{XZY} +$$

$$+ \cancel{ZXY} - \cancel{ZYX} - \cancel{XYZ} + \cancel{YXZ} = 0$$

Con questo bracket, $M_n(k)$ si indica anche con $\mathfrak{gl}(n,k)$ o $\mathfrak{gl}(n)$.

3) Lo stesso conto dice che se M è un'algebra associativa qualsiasi, allora è anche un'algebra di Lie, con bracket

$$[A,B] = A\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto in } M}}{}B - BA$$

Oss.: Se L è un'algebra di Lie e $\dim_k L = 1$, allora L è abeliana.

Infatti, sia x_0 una base di L, cioè ogni elem. è un multiplo scalare di x_0. Dati $x,y\in L$ qualsiasi, scriviamo $x=ax_0$, $y=bx_0$, e $[x,y] = [ax_0, bx_0] = ab[x_0,x_0] = 0$.

Def.: Sia L un'algebra di Lie e $M \subseteq L$ un sottosp. vett.

1) M si dice sottoalgebra di Lie se $\forall x, y \in M : [x,y] \in M$.
(In tal caso M è un'algebra di Lie).

2) M si dice un ideale se $\forall x \in M, \boxed{\forall y \in L} : [x,y] \in M$.
(Dalla antisimm. deriva che è equivalente richiedere $[y,x] \in M$)

3) Sia N un'algebra di Lie e $f : L \to N$ un'appl. lineare.
f si dice omomorfismo (di algebre di Lie) se
$f([x,y]) = [f(x), f(y)] \quad \forall x, y \in L$.

ma $\boxed{\text{non}}$ un sottoanello,
es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathfrak{sl}(2)$

Esempi: 1) $\mathfrak{sl}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$ è sottoalg. di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$

2) $\mathfrak{b}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$, $\quad \mathfrak{b}^u(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$\mathfrak{h}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$ anche.

3) $\mathfrak{sl}(n)$ è un ideale di $\mathfrak{gl}(n)$

4) $\mathfrak{z} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in k \right\}$ è un ideale di $\mathfrak{gl}(n)$,
e più in generale se $L \subseteq \mathfrak{gl}(n)$ è una sottoalgebra,
$\mathfrak{z} \cap L$ è un ideale di L.

5) $\mathfrak{b}^u(n)$ è un ideale di $\mathfrak{b}(n)$.

6) $\mathfrak{so}(n,k) = \{ A \in \mathfrak{gl}(n,k) \mid A + {}^tA = 0 \}$

$$\mathfrak{sp}(n,k) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,k) \mid A J_n + J_n {}^tA = 0\}$$

sono sottoalgebre di $\mathfrak{gl}(n,k)$.

Algebra di Lie di un sottogruppo chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$

Def.: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ un sgr chiuso.
Definiamo

$$Lie(G) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{tA} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Oss.: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso e $X \in M_n(\mathbb{R})$. Visto che $\mathbb{R}$ è connesso ed exp è continua, $\{e^{tX}\}$ è un s. i. connesso di $GL(n,\mathbb{R})$. Quindi $e^{tX} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}$ se e solo se $e^{tX} \in G^0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, in altre parole

$$Lie(G) = Lie(G^0).$$

Esempi: 1) $Lie(GL(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$: ovvio

2) $Lie(SL(n,\mathbb{R})) = ?$

Consid. $A \in M_n(\mathbb{R})$:
abb. visto che A è simile in $M_n(\mathbb{C})$ ad una matrice triang. sup:

$A = CBC^{-1}$ con $C \in GL(n,\mathbb{C})$ e $B \in M_n(\mathbb{C})$ triang. sup..
$tA = C(tB)C^{-1}$

Ora:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n = \text{autoval. di } A; \; \lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr(B) = tr(A))$$

$$e^B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\det(e^A) = \det(e^{CBC^{-1}}) = \det(C e^B C^{-1}) =$$

$$\det(e^B) = e^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = e^{tr(A)}$$

Quindi $e^A \in SL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow e^{Tr(A)} = 1 \Rightarrow tr(A) = 0 \Rightarrow A \in sl(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow tr(tA) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{tTr(A)} = 1 \;\; \forall t \Rightarrow e^{tA} \in SL(n, \mathbb{R})$.

Cioè $Lie(SL(n, \mathbb{R})) = sl(n, \mathbb{R})$.

3) Consid. $O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = I_n \}$

Data $X \in M_n(\mathbb{R})$, se $X + {}^tX = 0$ allora

$${}^t_sX = -sX \overset{\forall s \in \mathbb{R}}{\Longrightarrow} e^{s{}^tX} = e^{-sX} \Rightarrow {}^t(e^{sX}) = (e^{sX})^{-1} \Rightarrow X \in Lie(O(n, \mathbb{R})).$$

Viceversa, sia $X \in Lie(O(n, \mathbb{R}))$, quindi ${}^t(e^{sX}) = (e^{sX})^{-1} \;\; \forall s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{s{}^tX} = e^{-sX} \;\; \forall s \in \mathbb{R}$, allora prendiamo $s_0 \neq 0$ molto piccolo tale che $\| s_0 {}^tX \|$ e $\| -s_0 X \|$ siano così piccole da poter dedurre $s_0 {}^tX = -s_0 X$

e allora ${}^tX = -X$, da cui

$Lie(O(n, \mathbb{R})) = so(n, \mathbb{R})$.

Strano, i nomi non corrispondono! Motivo: $SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R})^0$, quindi

$Lie\left(SO(n,\mathbb{R})\right) = Lie\left(O(n,\mathbb{R})\right) \left(= so(n,\mathbb{R})\right)$.

4) Consid. $Sp(n,\mathbb{R}) = \{ A J_n {}^tA = J_n \}$ e $sp(n,\mathbb{R}) = \{ X J_n + J_n {}^tX = 0 \}$

Data $X \in sp(n,\mathbb{R})$ abb. $s \cdot X = - J_n s {}^tX J_n^{-1} \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$$e^{sX} = J_n e^{-s {}^tX} J_n^{-1} = J_n {}^t(e^{sX})^{-1} J_n^{-1}$$

$$e^{sX} J_n {}^t(e^{sX}) = J_n \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

quindi $X \in Lie\left(Sp(n,\mathbb{R})\right)$.

Viceversa se $e^{sX} J_n {}^t(e^{sX}) = J_n \ \forall s$ per una X, cioè se $X \in Lie\left(Sp(n,\mathbb{R})\right)$,

allora $e^{sX} = J_n e^{-s {}^tX} J_n^{-1} = e^{-s J_n {}^tX J_n^{-1}}$

Con $s_0 \neq 0$ abb. piccolo deduciamo $s_0 X = -s_0 J_n {}^tX J_n^{-1}$ cioè

$X J_n + J_n {}^tX = 0$, e allora $X \in sp(n,\mathbb{R})$.

In conclusione: $Lie\left(Sp(n,\mathbb{R})\right) = sp(n,\mathbb{R})$.

Obiettivo: dimostrare che Lie(G) è una sottoalgebra di Lie di $gl(n,\mathbb{R})$.
Per farlo, dobbiamo studiare il prodotto $e^X e^Y$.

Lemma: Esiste $\varepsilon>0$, una funzione continua R definita su $B(0,\varepsilon)\times B(0,\varepsilon)$ $\subseteq M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$ e una costante $C>0$ tali che

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+R(X,Y)} \qquad \forall X,Y\in B(0,\epsilon)$$

e tale che $\|R(X,Y)\|\leq C\left(\|X\|+\|Y\|\right)^3$.

Dim.: Poniamo

$$R(X,Y)= \log\left(e^X e^Y\right) - X-Y-\frac{1}{2}[X,Y]$$

E' ben definita per $\|X\|$ e $\|Y\|$ abbast. piccoli, perché allora e^X ed e^Y sono abb. vicini all'identità, e vale

$$\log\left(e^X e^Y\right) = X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+R(X,Y)$$ e basta applicare exp.

Invece per dim. la stima procediamo in modo indiretto.

Consid. $X,Y\in M_n(\mathbb{R})$, $t,s\in\mathbb{R}$, e il prodotto

$$e^{sX}e^{tY}$$

Per quanto visto finora, se (s,t) è in un intorno opportuno di $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ allora esiste una funzione Z tale che

$$e^{sX} e^{tY} = e^{Z(s,t)} \qquad \left(Z(s,t) = \log\left(e^{sX} e^{tY} \right) \right)$$

Esplicitiamo le serie di potenze (oss. che $e^{sX}e^{tY} - I_n$ è serie di potenze in s e t senza termine noto!)

$$Z(s,t) = \left(e^{sX}e^{tY} - I_n\right) - \frac{1}{2}\left(e^{sX}e^{tY} - I_n\right)^2 + (\dots)$$

$$= \left(\left(I_n + sX + \frac{1}{2}s^2X^2\right)\left(I_n + tY + \frac{1}{2}t^2Y^2\right) - I_n\right) - \frac{1}{2}\left(sX + tY\right)^2 + (\dots)$$

$$= \left(sX + tY + \frac{1}{2}s^2X^2 + stXY + \frac{1}{2}t^2Y^2\right) - \frac{1}{2}\left(s^2X^2 + st(XY + YX) + t^2Y^2\right) + (\dots)$$

$$= sX + tY + \frac{st}{2}[X,Y] + (\dots)$$

dove $(\dots)$ contiene monomi in s,t di grado totale > 2.

Segue $\quad Z(s,t) - sX - tY - \frac{st}{2}[X,Y] \left(= R(sX, tY) \right) =$

$$= s^3 F_1(sX, tY) + s^2t F_2(sX, tY) + st^2 F_3(sX, tY) + t^3 F_4(sX, tY)$$

con F_i f.ni continue definite in un intorno di 0. Deduciamo

$$\| R(sX, tY) \| \leq C\left(|s| + |t| \right)^3$$ per una costante C opportuna.

Date ora X, Y non nulle di norma abb. piccola, applichiamo la stima vista a

$X_0 = \frac{X}{\|X\|}$, $Y_0 = \frac{Y}{\|Y\|}$, $s = \|X\|$, $t = \|Y\|$ (quindi $sX_0 = X$, $tY_0 = Y$)

$\|R(X,Y)\| \leq c\left(\|X\| + \|Y\|\right)^3$..

$\square$

Vediamo ora il problema inverso: come ottenere e^{X+Y} in qualche modo da e^X ed e^Y.

Idea: Riscalare X e Y e provare a fare un limite nella formula del lemma prec..

Es. con $k \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\left(e^{\frac{X}{k} + \frac{Y}{k}}\right)^k = e^{X+Y}, \quad \left(e^{\frac{X}{k}}\right)^k = e^X, \quad \left(e^{\frac{Y}{k}}\right)^k = e^Y,$$

invece
$$\left(e^{[\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}]}\right)^k = \left(e^{\frac{1}{k^2}[X,Y]}\right)^k = e^{\frac{1}{k}[X,Y]} \longrightarrow 0$$

similmente
$$\left(e^{R(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k})}\right)^k \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty$$

Proposizione: Date $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ abb.

$$e^{X+Y} = \lim_{k \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y}\right)^k$$

$$e^{[X,Y]} = \lim_{k \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} e^{-\frac{1}{k}X} e^{-\frac{1}{k}Y}\right)^{k^2}.$$

Dim.: Dal lemma, per k abb. grande abbiamo

$$e^{\frac{1}{k}X}\, e^{\frac{1}{k}Y} = e^{\frac{1}{k}(X+Y)+\frac{1}{2k^2}[X,Y]+R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})}$$

e $\|R(X/k, Y/k)\| \le C(\|X/k\|+\|Y/k\|)^3 = C\cdot\frac{1}{k^3}(\|X\|+\|Y\|)^3$

da cui $\lim\limits_{k\to+\infty} k^2\left(R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})\right)=0,$

Allora

$$\left(e^{\frac{1}{k}X}\, e^{\frac{1}{k}Y}\right)^k = e^{X+Y+\frac{1}{2k}[X,Y]+k\,R(X/k,\frac{Y}{k})} \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{X+Y}.$$

Inoltre

$$e^{\frac{1}{k}X}\, e^{\frac{1}{k}Y}\, e^{-\frac{1}{k}X}\, e^{-\frac{1}{k}Y} = e^{\boxed{\frac{1}{k}(X+Y)+\frac{1}{2k^2}[X,Y]+R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})} = A(k)} \cdot e^{\boxed{-\frac{1}{k}(X+Y)+\frac{1}{2k^2}[X,Y]+R(\frac{-X}{k},\frac{-Y}{k})} = B(k)} =$$

$$= e^{A(k)+B(k)+\frac{1}{2}[A(k),B(k)]+R(A(k),B(k))} =$$

$$= e^{\frac{1}{k^2}[X,Y]+R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})+R(\frac{-X}{k},\frac{-Y}{k})+\frac{1}{2}[A(k),B(k)]+R(A(k),B(k))}$$

Oss.: $A(k)=\frac{1}{k}\tilde{A}(k)$ e $B(k)=\frac{1}{k}\tilde{B}(k)$ con $\tilde{A}(k)$ e $\tilde{B}(k)$ limitate, per cui $\|R(A(k),B(k))\|\le \tilde{C}\cdot\frac{1}{k^3}$, inoltre $\tilde{A}(k)\to X+Y$, $\tilde{B}(k)\to-(X+Y)$ per $k\to+\infty$

Quindi l'espressione di prima elevata alla k^2 viene

$$e^{[X,Y]+k^2R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})+k^2R(\frac{-X}{k},\frac{-Y}{k})+k^2R(A(k),B(k))+\frac{k^2}{2}[A(k),B(k)]}$$

che tende a $e^{[X,Y]}$ per $k\to+\infty$, perché

$$k^2[A(k),B(k)] = [\tilde{A}(k),\tilde{B}(k)] \xrightarrow[k\to+\infty]{} [X+Y,-(X+Y)]=0 \qquad \square$$

Teorema: Se G è un sgr chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$, allora $\mathrm{Lie}(G)$ è una sottoalg. di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Dim.: Che sia un s.v. chiuso per riscalaggio per reali è ovvio, chiusura per somma e per bracket segue dalla proposizione. $\square$

Coordinate esponenziali (o logaritmiche) su sottogruppi chiusi

Teorema: Sia $H \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sottogruppo chiuso. Esiste un intorno V di 0 in $Lie(H)$ e un intorno U di I_n in $GL(n,\mathbb{R})$ tali che $exp(V) = H \cap U$, $\quad exp|_V : V \longrightarrow exp(V)$ è un omeomorfismo, ed $exp(V)$ è un intorno di I_n in H.

Dim.: Ricordiamo il prodotto scalare su $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ scritto come $tr(A \cdot {}^tB)$. Sia $W = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(X \cdot {}^tY) = 0 \ \forall Y \in Lie(H)\}$ il complem. ortogonale, quindi

$$M_n(\mathbb{R}) = Lie(H) \oplus W$$

Definiamo un'appl. C^∞

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto e^{X_1} e^{X_2} \end{aligned}$$

dove $X = X_1 + X_2$ e $X_1 \in Lie(H)$, $X_2 \in W$. Oss. $\varphi(0) = I_n$,

e

$$\varphi(tX) = \left(I_n + tX_1 + \frac{t^2}{2} X_1^2 + \dots\right)\left(I_n + tX_2 + \frac{t^2}{2} X_2^2 + \dots\right)$$

$$= I_n + tX + t^2 \cdot F(t,X) \qquad \text{con } F(t,X) \ C^\infty.$$

Segue che il differenziale di φ in 0 è l'identità (il differenziale è l'appl. lineare $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} = M_n(\mathbb{R})$ che ha matr. canonica $J\varphi$, la Jacobiana di φ).

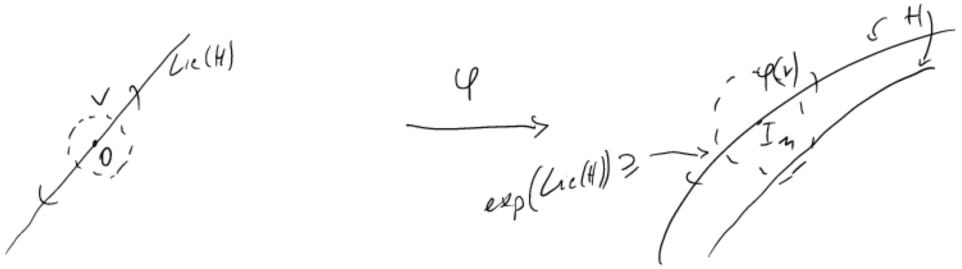
Per il teorema della funzione inversa, esiste $\sigma > 0$ tale che

$$\varphi|_{B(0,\sigma)} : B(0,\sigma) \longrightarrow \varphi(B(0,\sigma)) = \tilde{U}$$

ha immagine $\tilde{U}$ aperta, è un omeom. C^∞ con inversa C^∞.

Chiaramente allora $\varphi|_{B(0,\sigma) \cap Lie(H) = \tilde{V}}$ che è uguale a $\exp|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow \exp(\tilde{V})$

è un omeomorfismo, e allora lo è $\exp|_V : V \longrightarrow \exp(V) \subseteq H$ $\forall V$ intorno di 0 in $Lie(H)$ tale che $V \subseteq \tilde{V}$.



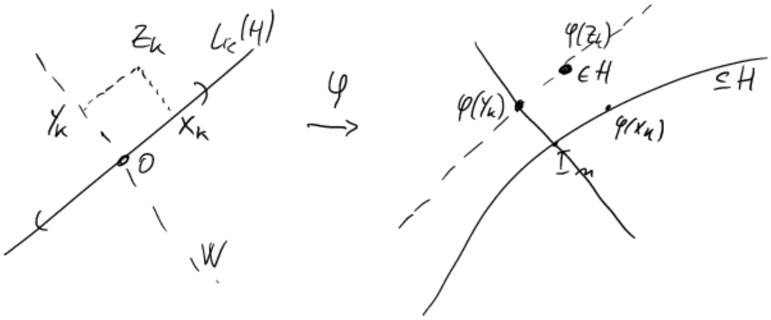
Dim. che possiamo scegliere V tale che $\exp(V)$ è un intorno di I_n in H.

Come prima cosa, studiamo $\varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H$ al variare di ε. Vogliamo dim. che con ε piccolo si ha $\varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H \subseteq \exp(B(0,\varepsilon) \cap Lie(H))$.

Per assurdo, supponiamo che $\forall \varepsilon \in]0,\sigma]$ valga

$$\varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H \nsubseteq \exp(B(0,\varepsilon) \cap Lie(H)) =: E(\varepsilon)$$

cioè $\forall k \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\exists Z_k \in B(0, \frac{\sigma}{k})$ t.c. $\varphi(Z_k) \in H$ ma $\varphi(Z_k) \notin E(\frac{\sigma}{k})$. Scriviamo

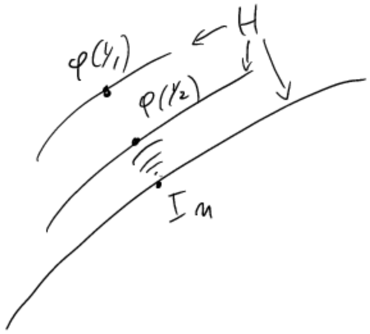


$Z_k = X_k + Y_k$

dove $X_k \in Lie(H)$

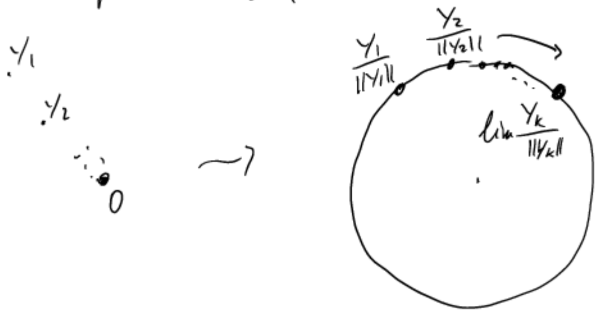
e $Y_k \in W$, $Y_k \neq 0$.

Ric.: $\varphi(Z_k) = e^{X_k} e^{Y_k}$. D'altronde $\varphi(Z_k)$, e^{X_k} sono in H, perciò $e^{Y_k} \in H$. Oss.: $\|Z_k\| < \frac{\sigma}{k}$, e allora $\|Y_k\| < \frac{\sigma}{k}$:



Ora l'idea è di rimpiazzare gli Y_k con una curva del tipo e^{tY}, tutta contenuta in H, con $Y \in W$. Però non è detto che questi Y_k siano su una tale curva! (Pensare a dim $W > 1$...)

Allora si procede così: si normalizzano gli Y_k e li si fa convergere su una sfera. Per il punto limite passerà la curva voluta. In realtà gli Y_k si „quasi normalizzano", usando multipli interi. Questo sarà utile.



Cioè si sceglie per ogni $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un intero $m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che $\sigma \leq m_k \|Y_k\| \leq 2\sigma$.

La successione $m_k Y_k$ è limitata, rimpiazziamola con una sottosucc. convergente e poniamo $Y := \lim_{k\to+\infty} m_k Y_k$. Abb. $Y \in W$, e $\|Y\| \geq \sigma$ quindi $Y \neq 0$.

Inoltre $e^{Y_k} \in H$, quindi $e^{m_k Y_k} \underset{\boxed{m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}}{=} \left(e^{Y_k}\right)^{m_k} \in H$, quindi

$e^Y \in H$.

Dim. che $e^{tY} \in H$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Scriviamo $t m_k = a_k + b_k$ con $a_k \in \mathbb{Z}$ e $b_k \in [0,1[$. Allora

$$e^{t m_k Y_k} = \left(e^{Y_k}\right)^{a_k} e^{b_k Y_k}$$

D'altronde $t b_k Y_k \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ perché $Y_k \to 0$ e b_k è limitata, per cui $e^{t b_k Y_k} \to I_n$. Concludiamo:

$$e^{tY} = \lim_{k\to+\infty} e^{t m_k Y_k} = \lim_k \left(e^{Y_k}\right)^{a_k} \in H.$$

Cioè $Y \in Lie(H) \cap W$ ma $Y \neq 0$: assurdo. Segue: $\exists \varepsilon > 0 \mid$ $\varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H \subseteq \exp(B(0,\varepsilon) \cap Lie(H))$.

Sia allora $V = B(0,\varepsilon) \cap Lie(H)$ e $U = \varphi(B(0,\varepsilon))$. Abb.

$$\exp(V) = \varphi(B(0,\epsilon) \cap Lie(H)) \subseteq \varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H \subseteq \exp(B(0,\varepsilon) \cap Lie(H)) = \exp(V)$$

e allora $\exp(V) = \varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H$, cioè $\exp(V)$ è un intorno aperto di I_n in H. □

Corollario: Sia G sgr chiuso di $GL(n, \mathbb{R})$.

$\exp(\mathrm{Lie}(H))$ genera G°.

Per la dim.:

Lemma: Sia G gruppo top. connesso, e U un intorno di e_G.

Allora U genera G.

Dim. del lemma**:** Sia H il sgr generato da U, allora $H \overset{\neq \emptyset}{\text{è}}$ aperto, perché se contiene $h \in H$ allora contiene l'intorno aperto $h \cdot U$ di h. Ma allora H è anche chiuso, perciò $H = G$ per connessione di G.

□

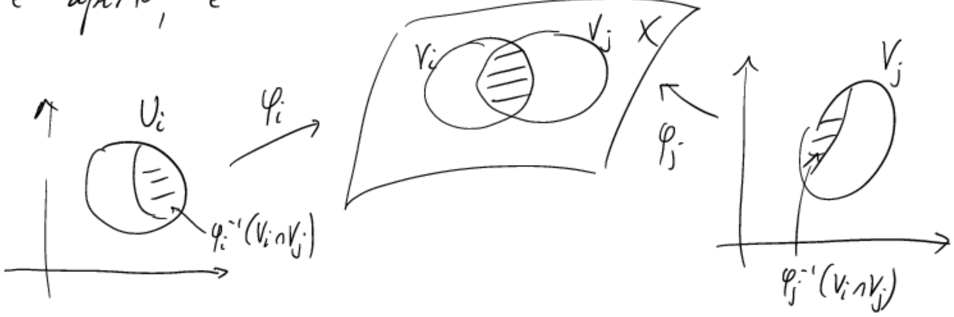
Dim. del corollario: $\exp(\mathrm{Lie}(G))$ contiene un int. di I_n in G per il teorema prec., ed è cont. in G°. □

Esercizio: Siano $G, H \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ sgr. chiusi connessi. Se $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(H)$ allora $G = H$.

Struttura di var. differenziabile su sottogruppi chiusi

Richiami di geom. diff.:

Def.: Una *varietà differenziabile* di dim. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ è uno spazio topologico M di Hausdorff 2°-numerabile, dotato di un ricoprimento aperto $\{V_i\}$ e per ogni i un omeomorfismo $\varphi_i : U_i \to V_i$ dove $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, e



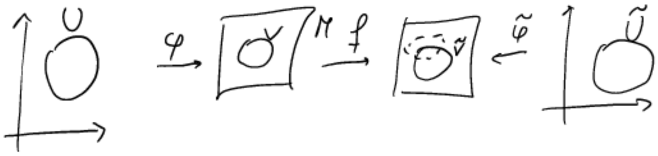
$$\forall i,j : \quad \varphi_j^{-1} \circ \left(\varphi_i \Big|_{\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)} \right) : \varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \longrightarrow \varphi_j^{-1}(V_i \cap V_j) \quad \text{è} \quad C^\infty .$$

In tal caso, la collezione $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_i$ si chiama *atlante* (C^∞) di M, e le φ_i si chiamano *carte locali*. Possiamo assumere che l'atlante sia *massimale*, cioè se $\varphi: U \to V$ è compatibile con le carte locali allora è già nell'atlante.

Def.: Sia M una var. diff. di dim. n, e $N \subseteq M$. N è una *sottovarietà immersa* (embedded) di dimensione $m (\leq n)$ se in ogni p.to *di N* la var. M ha una carta locale $\varphi : U \to V$ t.c. $\varphi^{-1}(V \cap N) = \{(x_1, \dots, x_n) \in U \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$.

Oss.: 1) In questo caso N è una var. diff. con le carte locali indotte per restrizione di quelle di M.

2) Un'applicazione $M \to \tilde{M}$ di var. diff. si dice C^∞ se lo sono tutte le composizioni con le carte locali $\tilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(f^{-1}(\tilde{V}) \cap U) \to \tilde{U}$



3) Date due var. diff. M_1, M_2, è def. naturalm. una str. di var. diff. su $M_1 \times M_2$.

Def.: Un gruppo di Lie (su $\mathbb{R}$) è un gruppo topol. con strutt. di varietà diff. tale che l'operazione di gruppo e l'inversione sono C^∞.

Teorema: Sia $G \leq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso. Allora G è una sottovar. immersa di $GL(n, \mathbb{R})$ (= aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$) ed è un gruppo di Lie.

Dim.: Abbiamo già visto che esiste un intorno aperto Ω di 0 in $M_n(\mathbb{R})$ tale che $\exp(\Omega)$ è intorno ap. di I_n in $GL(n, \mathbb{R})$, $\exp|_\Omega : \Omega \to \exp(\Omega)$ è C^∞ con inversa C^∞. Per il teorema precedente, a meno di restringere Ω possiamo assumere:

$$\forall X \in \Omega : \; e^X \in G \iff X \in Lie(G).$$

Quindi $\exp|_\Omega = \Phi$ è carta locale in I_n per $GL(n,\mathbb{R})$ tale che G è dato (in coordinate) dall'annullarsi di alcune coordinate: basta cambiare base in $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2n}$ scegliendo i primi vettori dentro $Lie(G)$ e i rimanenti fuori.

In un punto qualsiasi $g_0 \in G$ basta usare

$$\begin{aligned} \Phi_{g_0} : \Omega &\longrightarrow g_0 \exp(\Omega) \\ X &\longmapsto g_0 e^X \end{aligned}$$

e osservare che $g_0 e^X \in G \iff e^X \in G$.

$\square$

$M_n(\mathbb{C})$? $GL(n,\mathbb{C})$?

Applichiamo quanto visto per $GL(n,\mathbb{R})$ e i suoi sottogr. chiusi a $GL(n,\mathbb{C})$ e ai suoi sgr chiusi, vedendo tutto dentro $M_{2n}(\mathbb{R})$.

Prima di tutto osserviamo che $M_n(\mathbb{C})$ si può considerare come sottoalgebra associativa (col prodotto usuale di matrici) di $M_{2n}(\mathbb{R})$, basta identificare $i \in \mathbb{C}$ con la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) = \underline{i} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

Concretamente, consideriamo

$$\{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot A\} = \overline{M}$$

Scriviamo una tale A a blocchi $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}, \quad A \cdot \underline{i} = \begin{pmatrix} -C & B \\ -E & D \end{pmatrix}, \quad \underline{i} \cdot A = \begin{pmatrix} D & E \\ -B & -C \end{pmatrix}$$

da cui $D = -C$, $B = E$, cioè A è della forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{\text{la „parte reale"}} + \underline{i} \underbrace{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{\text{la „parte immaginaria"}}$$

<u>Proposizione</u>: $\overline{M} \xrightarrow{F} M_n(\mathbb{C})$ è isomorfismo di spazi vettoriali <u>reali</u>
$A \longmapsto B + iC$
ed è compatibile con il prodotto usuale $\left(F(A_1 \cdot A_2) = F(A_1) \cdot F(A_2)\right)$
cioè F è un isom. di algebre associative.

<u>Dim.</u>: Una verifica diretta è semplice! Si può vedere ancora più facilmente in $M_{2n}(\mathbb{C})$, consid.

$$\overline{M} \subseteq M_{2n}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2n}(\mathbb{C}) \supseteq \tilde{M} = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \,\middle|\, X \in M_n(\mathbb{C}) \right\} \cong M_n(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \mapsto X$$

Allora F diventa

$F : \bar{M} \to \tilde{M}$

$$\begin{pmatrix} B+iC & 0 \\ 0 & B+iC \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \underline{i} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

ed è ancora più semplice verificare che F è isom. di alg. associative su $\mathbb{R}$.

$\square$

<u>Oss.</u>: 1) Dalla prop. segue che $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come algebra di Lie $\underline{\underline{\text{su } \mathbb{R}}}$ è isomorfa (si può identificare come prima) a $\bar{M}$, sottoalg. di Lie (su $\mathbb{R}$) di $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$.

2) possiamo identificare il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ (che è formato dagli elt invertibili dell'alg. associativa $M_n(\mathbb{C})$) con gli elem. invertibili dell'alg. associativa $\bar{M}$, cioè identifichiamo $GL(n, \mathbb{C})$ con $\bar{M} \cap GL(2n, \mathbb{R})$. Questo "rende" $GL(n, \mathbb{C})$ un sgr <u>chiuso</u> di $GL(2n, \mathbb{R})$. I sgr chiusi di $GL(n, \mathbb{C})$ si identificano allora a loro volta con sgr chiusi di $GL(2n, \mathbb{R})$.

3) Possiamo allora applicare tutta la teoria vista anche a sgr chiusi di $GL(n, \mathbb{C})$.

Ma <u>ATTENZIONE</u>:

a) il parametro $t \in \mathbb{R}$ usato spesso rimane <u>reale</u>! Cioè dato $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ chiuso, abb.

$$Lie(G) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid e^{tA} \in G \quad \forall t \in \textcircled{\mathbb{R}} \}$$

b) Lie(G) così definita è una sottoalgebra di Lie <u>reale</u> di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, in generale <u>non complessa</u> !

<u>Esempio</u>: $\{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A^{-1} \} = \{\text{matrici unitarie}\} = U(n)$

e vale $Lie(U(n)) = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid A + {}^t\bar{A} = 0 \} = \mathfrak{u}(n)$,

la dim. è simile alla dim. che $Lie(O(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

<u>Lo spazio tangente a $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$</u>

<u>Def.</u>: Sia M sottovarietà diff. immersa in $\mathbb{R}^N$, e $p \in M$.

Definiamo <u>lo spazio tangente a M in p</u>:

$$T_pM = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : J \longrightarrow M \text{ di classe } C^\infty, \; J \subseteq \mathbb{R} \text{ un intervallo aperto contenente } 0, \; \alpha(0) = p \}$$

<u>Oss</u>: Ricordiamo dalla geom. diff. che T_pM è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^N$, e $\dim_{\mathbb{R}} T_pM$ come sp. vett. = dim(M) come varietà differenziabile.

<u>Teorema</u>: Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso. Abb.

$$Lie(G) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sp. tangente alla var. } G \text{ in } I_n \in G}}{T_{I_n} G}$$

Dim.: $\subseteq$] Data $X \in \mathrm{Lie}(G)$, basta porre $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$
$t \longmapsto e^{tX}$

e ricordare che $\alpha'(0) = X$.

$\supseteq$] Sia $v \in T_{I_n}(G)$, e $\alpha : J \longrightarrow G$ con $\alpha'(0) = v$.

Rimpiccioliamo J in modo tale da poter scrivere

$\alpha(t) = e^{\beta(t)}$ con $\beta : J \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)$ di classe C^∞,

e $\beta(0) = 0$ $\left(\beta(t) = \log(\alpha(t))\right)$

Osserviamo che $\beta'(0) = \frac{d}{dt}\left(t\,\beta'(0)\right)\Big|_{t=0}$ con γ C^∞

$$v = \frac{d}{dt} e^{\beta(t)}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t\beta'(0)}\Big|_{t=0}$$

$= \beta'(0) \,\textcircled{\scriptsize$\in$}\, \mathrm{Lie}(G)$. perché la curva β è tutta cont. in $\mathrm{Lie}(G)$.

$\square$

Altri esempi: $\mathcal{B}(n) = \{ \text{matr. triang. sup. invertibili} \} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$

$$\mathcal{B}^u(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$$

Abb. $\mathrm{Lie}(\mathcal{B}(n)) = \mathfrak{b}(n)$, $\mathrm{Lie}(\mathcal{B}^u(n)) = \mathfrak{b}^u(n)$

Dim.: $\mathfrak{b}(n) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathcal{B}(n))$ perché se $A \in \mathfrak{b}(n)$ allora $(tA)^m \in \mathfrak{b}(n)$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, quindi $A \in \mathrm{Lie}(\mathcal{B}(n))$.

$\mathfrak{b}(n) \cong Lie(B(n))$ perché

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{b}(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come s.var.} \\ \text{diff. di } GL(n,\mathbb{R})}}{\dim\left(B(n)\right)} = \dim_{\mathbb{R}}\left(Lie\left(B(n)\right)\right).$$

dim. di $Lie(B^u(n)) = \mathfrak{b}^u(n)$: <u>simile</u>.

Per dimostrare $\mathfrak{b}(n) \cong Lie(B(n))$ si può usare anche il logaritmo, opp. la formula $X = \frac{d}{dt} e^{tX}\Big|_{t=0}$. Più avanti vedremo ancora un'altra dim. di $\mathfrak{b}(n) \cong Lie(B(n))$ che non usa la dim. di $B(n)$ come var. differenziabile.

Cenni sulla def. dell'algebra di Lie per un gruppo di Lie generale

Si prende G gruppo di Lie, si considerano campi vettoriali tangenti a G, cioè applicazioni C^∞ del tipo $g \mapsto v_g \in T_g G$ per $g \in G$. Per definirli correttamente, si interpretano i vettori di $\mathbb{R}^n$ identificandoli con le corrispondenti derivate direzionali,

e identificando un campo vettoriale C^∞ su $\mathbb{R}^n$: $x \mapsto v_x$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ v_x \in \mathbb{R}^n)$ con l'applicazione

$$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$
$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v_x}$$

Risutano tutte applicazioni che soddisfano la regola di Leibnitz:

$$\delta(f\cdot g)= \delta(f)\cdot g + f\cdot \delta(g).$$

Inoltre vale il viceversa: ogni δ siffatta corrisp. a un campo vettoriale.

Conseguenza: si possono definire i campi vettoriali tangenti a una varietà diff. astratta M come le derivazioni di $C^\infty(M,\mathbb{R})$, cioè

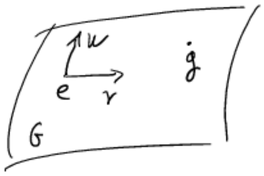
$$\{\delta : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \mid \delta \text{ lineare, } \delta(f g)=\delta(f)\cdot g + f\cdot \delta(g)\}$$

Inoltre in generale $\delta\circ\varepsilon$ non è una derivazione, e aviene che $\delta\circ\varepsilon$ può essere diverso da $\varepsilon\circ\delta$, e vale:

$\delta\circ\varepsilon - \varepsilon\circ\delta$ $\underline{\text{è}}$ una derivazione.

Questo si usa per definire la struttura di algebra di Lie su $T_e G$ dove G è un gruppo di Lie:

siano $v, w \in T_e G$



si creano due campi vettoriali $\underline{v}$, $\underline{w}$ su G, definendo

$\underline{v}_g \in T_g G$ come l'immagine di v tramite il differenziale di $\begin{array}{c} G \to G \\ x \mapsto gx \end{array}$ in $e \in G$

e si definisce $[v, w]$ in $T_e G$ come $\underline{v} \circ \underline{w} - \underline{w} \circ \underline{v}$.

Omomorfismi di gruppi

Proposizione: Siano $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ e $H \subseteq GL(m, \mathbb{R})$ sgr chiusi.

Sia $\varphi : G \to H$ omomorfismo di gruppi, *continuo*.

Esiste un unico omom. di alg. di Lie

$d\varphi : Lie(G) \to Lie(H)$, chiamato il *differenziale* di φ,

tale che $\varphi\left(e^X\right) = e^{d\varphi(X)}$ $\forall X \in Lie(G)$.

Dim.: Dato $X \in Lie(G)$, consid. $t \mapsto \varphi\left(e^{tX}\right)$: è un omom. $(\mathbb{R}, +) \to H$ continuo, per cui esiste unica $Y \in Lie(H)$ con $\varphi\left(e^{tX}\right) = e^{tY}$ $\forall t$. Poniamo $d\varphi(X) = Y$.

Dimostriamo che $d\varphi$ è lineare e compatibile col bracket:

1) compatibilità con moltiplicaz. per $s \in \mathbb{R}$: ovvio.

2) —— con la somma: siano $X, Z \in Lie(G)$,

allora

$$\varphi\left(e^{t(X+Z)}\right) = \varphi\left(e^{tX+tZ}\right) = \lim_{k\to+\infty} \varphi\left(e^{\frac{1}{k}tX} e^{\frac{1}{k}tZ}\right)^k =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\varphi\left(e^{\frac{1}{k}tX}\right) \cdot \varphi\left(e^{\frac{1}{k}tZ}\right)\right)^k =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{k}t d\varphi(X)} \cdot e^{\frac{1}{k}t d\varphi(Z)}\right)^k = e^{t(d\varphi(X)+d\varphi(Z))}$$

da cui $d\varphi(X+Z) = d\varphi(X) + d\varphi(Z)$.

3) compatibilità col bracket, cioè $d\varphi([X,Y]) = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]$: si usa la formula vista per $e^{[X,Z]}$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Se G, H, φ sono come nella prop., allora φ è C^∞.

<u>Dim.</u>: La formula $\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)}$ ci dice che

$$\varphi(A) = e^{d\varphi(\log(A))} \quad \text{per } A^{\in G} \text{ abbastanza vicino a } I_n.$$

Quindi φ è C^∞ in un intorno di I_n.

Inoltre $\varphi(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{variabile} \\ \text{vicino a } I_n}}{A} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fissata}}}{B}) = \varphi(A)\cdot\varphi(B)$, $\varphi(A) = \varphi(A\cdot B)\,\varphi^{-1}(B)$

mostra che φ è C^∞ in un intorno di B, $\forall B \in G$.

$\square$

Nella prossima sezione vedremo esempi di omomorfismi continui.

Rappresentazioni: prime def. ed esempi.

Oss.: Dato V sp. vett. qualsiasi, $\overset{\text{su } k \text{ campo}}{\checkmark}$ $GL(V) = \{ f: V \to V \text{ isom. lineare} \}$, $\operatorname{End}(V) = \{ f: V \to V \text{ lineare} \}$, è un'algebra associativa col prodotto dato dalla composizione. Questo induce una str. di algebra di Lie col bracket $[f,g] = f\circ g - g\circ f$ e l'alg. di Lie si denota con $\mathfrak{gl}(V)$.
Se V ha dim. finita $\overset{=n}{\checkmark}$ possiamo fissare una base e questo induce isomorfismi $GL(V) \cong GL(n,k)$, $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n,k)$.

Def.: 1) Sia G un gruppo, k un campo qualsiasi.
Una rappresentazione di G (su k) è un omom. di gruppi $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$, dove V è uno sp. vett. su k.

2) Data un'alg. di Lie L su k, una rappresentazione di L è un omom. di algebre di Lie $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

3) In entrambi i casi, V si dice anche un (G-)modulo, rispett. (L-)modulo. Dati $g \in G$ e $v \in V$, il vettore $(\varphi(g))(v)$ si scrive anche $g \cdot v$ o gv, se è chiaro quale φ si sta consid.. Dati $x \in L$ e $v \in V$, il vettore

$(\varphi(x))(v)$ si scrive anche $x.v$ o xv.

4) Un sottosp. vett. $W \subseteq V$ si dice un (G- opp. L-) sottomodulo di V se $\forall g \in G\ \forall w \in W : g \cdot w \in W$, risp. $\forall x \in L\ \forall w \in W\ x.w \in W$.

5) V (opp. φ) si dice irriducibile se V ha esattam. due sottomoduli V e $\{0\}$ (che sono sempre sottomoduli, ovviamente). In particolare se V è irriducibile allora $V \supsetneq \{0\}$ (cioè $\dim(V) > 0$).

6) V (opp. φ) si dice completam. riducibile se V è somma diretta di sottomoduli irriducibili (anche con infiniti addendi). Per def. V (opp. φ) si dice completam. riducibile anche se $V = \{0\}$, che

viene interpretato come la somma diretta di „*nessun*" sottomodulo irriducibile.

7) Dati due moduli V, W, la somma diretta $V \oplus W$ ha struttura naturale di modulo:

$$g \cdot (v+w) = g \cdot v + g \cdot w \qquad (\text{dati } g \in G,\ v \in V, w \in W)$$

rispettiv. $x.(v+w) = x.v + x.w$ (dato $x \in L$).

Oss.: Se G è un gruppo topologico, $k = \mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$, e V ha dim. finita n, allora $GL(V)$ è identif. con $GL(n,k)$ ed è naturale considerare rappr. *continue* $\varphi : G \to GL(V)$.
(Questo si fa anche con V di dim. infinita, ma bisogna decidere che topologia mettere su $GL(V) \subseteq End(V)$ = sp. vett. su k di dim. infinita.)

Oss.: Se un modulo ha dim. 1 è automaticam. irriducibile.

Esempi: 1) Se $G \subseteq GL(n,k)$ allora $V = k^n$ è naturalm. un G-modulo, tramite l'inclusione $\varphi : G \to GL(n,k)$. Qui $g.v$ è semplicem. la moltipl. matrice × vettore.

Questo V è irriducibile, perché dato $W \subseteq V$ sottom. $\neq \{0\}$, abb. $\exists\, w \in W \setminus \{0\}$, e $\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists\, g \in G \mid g.w = v$, quindi $W = V$.

2) Se $\varphi: G \longrightarrow H \subseteq GL(m, \mathbb{R})$ è un omom., allora $W = \mathbb{R}^m$ è un G-modulo,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{str. di } G\text{-modulo}}}{g \cdot} v = \varphi(g) v \ \ {}^{\nwarrow}\text{prodotto matr. x vett.}$$

3) Sia $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ l'appl. banale, $\varphi(g) = \mathrm{Id}_V$, allora V (opp. φ) si chiama <u>banale</u>. Ogni sottosp. vett. $W \subseteq V$ è sottomodulo, quindi V è completam. riducibile $\left(V = \bigoplus_{e \in \text{base}} ke\right)$.

4) $$P = \left\{ \begin{array}{c} \ell\{ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc} \boxed{*} & \boxed{*} \\ \underbrace{0}_{\ell} & \underbrace{\boxed{*}}_{n-\ell} \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \}n-\ell \end{array} \right\} \subseteq GL(n, k)$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ base canonica di k^n

abb.: $\mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_\ell\} = W$ è un P_ sottomodulo

5) $G = (k, +)$

$$\varphi: G \longrightarrow GL(2, k)$$
$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I sottomoduli: $\{0\}$, ke_1, k^2

quindi φ non è irriducibile, non è neppure completamente riducibile!

6) $G = (k_{\neq 0}, \times) = k^*$

$$\varphi: k^* \longrightarrow GL(n, k)$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix}$$

Ogni sottosp. vettoriale è un G-sottomodulo, ma φ non è banale!

7) $$k^* \to GL(n,k)$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{a_n} \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

Alcuni s.moduli: $ke_1, \dots, ke_n$.

8) $$GL(n,k) \longrightarrow GL(n,k)$$
$$A \longmapsto {}^tA^{-1}$$

è omom. di gruppi $\left({}^t(AB)^{-1} = {}^t(B^{-1}A^{-1}) = {}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1} \right)$

e rende k^n un $GL(n,k)$-modulo.

9) In modo simile, ogni autom. di $GL(n,k)$ fornisce una struttura diversa di G-modulo a k^n.

10) Sia $\varphi : G \to GL(V)$ una rappresentazione.
Il duale V^* ha una struttura naturale di G-modulo:

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1}v)$$

$$\left(\text{cioè } \tilde{\varphi} : G \to GL(V^*) \atop \qquad g \longmapsto (f \mapsto f(g^{-1} -)) \right)$$

Verifichiamo che è una rappresentazione:

$$\tilde{\varphi}(gh) \overset{?}{=} \tilde{\varphi}(g)\circ\tilde{\varphi}(h)$$

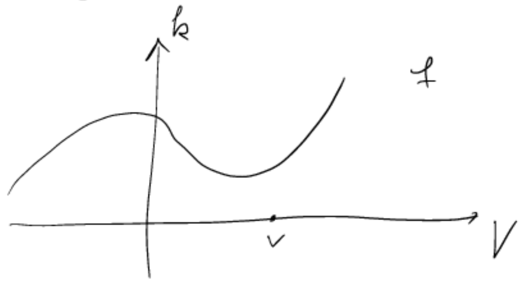
E' equival. a dire $(gh)\cdot f \overset{?}{=} g\cdot(h\cdot f)$

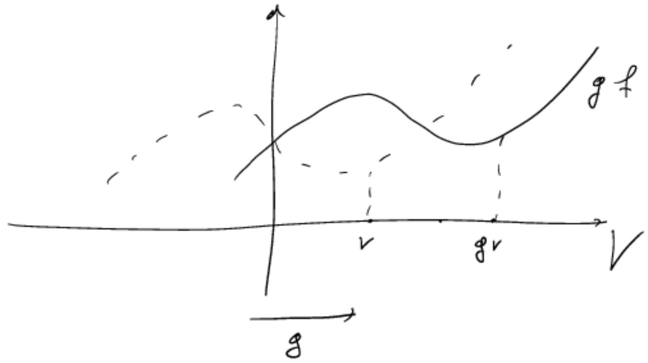
Oss.: $\varphi(gh)=\varphi(g)\circ\varphi(h)$ vuol dire $(gh)\cdot v = g\cdot(h\cdot v)$.

Allora:

$$\big((gh)\cdot f\big)(v) = f\big((gh)^{-1}v\big) = f\big(h^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot v)\big)$$

$$\big(g\cdot(h\cdot f)\big)(v) = (h\cdot f)\big(g^{-1}v\big) = f\big(h^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot v)\big)$$ quindi ok





Qual è la formula della f.ne trasformata $g.f$?

In gv deve valere $f(v)$, cioè $(gf)(gv) = f(v)$,

e allora $\boxed{(gf)(v)} = (gf)(g\cdot\underbrace{g^{-1}v}) = \boxed{f(g^{-1}v)}$.

G-moduli vs. Lie(G)-moduli

Sia $G \leq GL(n,\mathbb{R})$ un sgr chiuso, e $\varphi: G\to GL(V)$ una rappr. continua, con V su $\mathbb{R}$ di dim. finita.

Allora $d\varphi: Lie(G)\longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ è una rappresentazione di $Lie(G)$.

Oss.: Attenzione: non sempre una rappr. $\psi : Lie(G) \to gl(V)$ viene da una rappresentaz. di G (v. fogli settimanali di esercizi).

Esempio: Sia $\varphi : \overset{\subseteq GL(n,\mathbb{R})}{G} \to GL(m,\mathbb{R})$, $g \mapsto \varphi(g)$ una rappr. continua, poniamo $V = \mathbb{R}^m$ e consid. $\tilde{\varphi} : G \to GL(V^*)$. Presa la base duale $(e_1^*, -, e_m^*)$, abb.

$$\left(\tilde{\varphi}(g) \cdot e_i^*\right)(e_j) = e_i^*\left(\varphi(g)^{-1} e_j\right) =$$

$$= e_i^* \begin{pmatrix} (\varphi(g)^{-1})_{1j} \\ \vdots \\ (\varphi(g)^{-1})_{mj} \end{pmatrix} = \left(\varphi(g)^{-1}\right)_{ij}$$

Ora, $\tilde{\varphi}(g) \cdot e_i^*$ è la i-esima colonna di $\tilde{\varphi}(g)$, e calcolarne il valore su e_j estrae l'entrata alla riga j.

Deduciamo $\boxed{\tilde{\varphi}(g) = {}^t\varphi(g)^{-1}}$

Calcoliamo $d\tilde{\varphi}$: $$e^{d\tilde{\varphi}(X)} = \tilde{\varphi}\left(e^X\right) = {}^t\varphi(e^X)^{-1} =$$

$${}^t\left(\varphi\left(e^{-X}\right)\right) = {}^t\left(e^{-d\varphi(X)}\right) = e^{-{}^t d\varphi(X)}$$

Poss. assumere $\|X\|$ piccolo, (riscalando X) e concludere $d\tilde{\varphi}(X) = -{}^t(d\varphi(X))$.

Cioè $$\left(d\tilde{\varphi}(X) . e_i^*\right)(e_j) = -d\varphi(X)_{ij} = e_i^*\left(\left(-d\varphi(X) . e_j\right)\right)$$

Per linearità, otteniamo $\left(d\tilde{\varphi}(X) . \eta\right)(v) = \eta\left(-d\varphi(X) . v\right)$.

Def: Data $\varphi: L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ rappresentaz. di L alg. di Lie (qualsiasi)

anche V^* è in modo naturale un L-modulo, ponendo

$$(X.\eta)(v) = \eta(-X.v) \qquad \forall \eta \in V^*,\ \forall v \in V.$$

Esercizio: Dim. in generale che questo def. una rappr. $\varphi^*: L \to gl(V^*)$.

Teorema: Sia $G \leq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso, e $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$

una rappr. continua (V su $\mathbb{R}$ di dim. finita).

Consid. $d\varphi: Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $W \leq V$ sottosp. vett.

1) Se W è un G-sottom., allora è un $Lie(G)$-sottomodulo.

2) Se G è connesso e W è un $Lie(G)$-sottom., allora è un G-sottom..

In particolare, se G è connesso allora:

a) φ è irriduc. $\iff$ $d\varphi$ è irriduc..

b) φ è completam. riduc. $\iff$ $d\varphi$ è completam. riducibile.

Dim.: 2) Supp. N sia un L-sottomodulo, e sia $g \in \overset{\text{CONNESSO}}{G}$. Allora

$$g = e^{X_1} \cdots e^{X_k} \qquad \text{per elem. } X_1, \dots, X_k \in Lie(G),$$

e abb. $$\varphi(g) = \varphi(e^{X_1} \cdots e^{X_k}) = \varphi(e^{X_1}) \cdots \varphi(e^{X_k}) =$$

$$= e^{d\varphi(X_1)} \cdots e^{d\varphi(X_k)}.$$

Dato $w \in W$, sappiamo che $d\varphi(X_i).w \in W$, e allora anche $e^{d\varphi(X_k)} \cdot w \in W$, per cui

$$e^{d\varphi(X_1)} \cdot \_ \cdot e^{d\varphi(X_k)} \cdot w = e^{d\varphi(X_1)} \cdot \_ \cdot e^{d\varphi(X_{k-1})} \underbrace{\left(e^{d\varphi(X_k)} \cdot w \right)}_{\in W}$$

e per induzione concludiamo $\varphi(g)\, w \in W$, cioè W è un G-sottomodulo.

1) Viceversa, supp. W un G-sottomodulo, siano $w \in W$ e $X \in Lie(G)$.

Allora

$$d\varphi(X).w = \left(\frac{d}{dt} e^{d\varphi(tX)} \right)\Big|_{t=0} . w =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \varphi\left(e^{tX}\right) \right)\Big|_{t=0} . w = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\varphi\left(e^{tX}\right) \cdot w}_{\in W} \right)\Big|_{t=0} \in W. \qquad \square$$

La rappresentazione aggiunta

Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso, e consid.

$$\Gamma : G \longrightarrow GL\left(M_n(\mathbb{R})\right)$$

$$g \longmapsto A \mapsto g A g^{-1}$$

Si tratta di una rappresentazione di G.

Lemma: $\mathrm{Lie}(G) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ è un G-sottomodulo per Γ.

Dim.: Ovvio se consid. che $\mathrm{Lie}(G) = T_{I_n} G$. Verif. anche con la def. Dati $g \in G$, $X \in \mathrm{Lie}(G)$, calcoliamo

$$e^{t(gXg^{-1})} = g e^{tX} g^{-1} \in G \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

quindi $gXg^{-1} \in \mathrm{Lie}(G)$.

$\square$

Def.: La rappresentazione

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\longrightarrow GL(\mathrm{Lie}(G)) \\ g &\longmapsto (X \mapsto gXg^{-1}) \end{aligned}$$

si chiama <u>rappresentazione aggiunta</u> di G.

Il suo differenziale si indica con

$$\mathrm{ad} : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathrm{Lie}(G))$$

e si chiama la <u>rappresentazione aggiunta</u> di L.

Oss.: Data $\varphi: G \to GL(V)$ rappr. continua e $W \subseteq V$ sottomodulo, poss. consid. $\tilde{\varphi}: G \to GL(W)$ la „restriz. a W", cioè $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)|_W : W \to W$.

Stessa cosa per $d\varphi: Lie(G) \to \mathfrak{gl}(V)$, e $\widetilde{d\varphi}: Lie(G) \to \mathfrak{gl}(W)$.

Abbiamo naturalmente $\boxed{d\tilde{\varphi} = \widetilde{d\varphi}}$, per l'unicità della proprietà di $d\tilde{\varphi}$.

Quindi ad è la „restrizione" di $d\Gamma$ al sottomodulo $Lie(G)$

Proposizione: $ad(X)(Y) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in Lie(G)$

Dim.: Calcoliamo $ad(X) = d\Gamma(X)$. Sia $Y \in Lie(G) \subseteq M_n(\mathbb{R})$

$$e^{d\Gamma(X)} \cdot Y = \Gamma(e^X) \cdot Y = e^X Y e^{-X}.$$

$$d\Gamma(X) = \frac{d}{dt} e^{t d\Gamma(X)}\Big|_{t=0}$$ come endom. di $M_n(\mathbb{R})$

quindi applicato a $Y \in M_n(\mathbb{R})$ viene

$$ad(X)(Y) = d\Gamma(X)(Y) = \left(\frac{d}{dt} e^{t\,d\Gamma(X)}\right)\Big|_{t=0} \cdot Y = \dots$$

Ora, se $\alpha: \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ è C^∞ e $v \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\alpha'(t) \cdot v = \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot v)$$ (ESERCIZIO)

Quindi

$$\dots = \frac{d}{dt}\left(e^{t\, d\Gamma(X)}\cdot Y\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\, Y\, e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} = \dots$$

Ora: se $\alpha : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ è C^∞, e $\beta : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ è C^∞,

allora
$$\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\underset{\uparrow}{\cdot}\beta(t)\Big) \underset{\uparrow}{=} \alpha'(t)\cdot\beta(t) + \alpha(t)\cdot\beta'(t).$$

prodotto fra matrici

<u>ESERCIZIO</u>

Concludiamo

$$\dots = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0} \cdot Y \cdot \left(e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} + \left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0} \cdot Y \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= XY - YX. \qquad \square$$

<u>Def.</u>: Sia L algebra di Lie qualsiasi su un campo k.

La <u>rappresentazione aggiunta</u> di L è

$$ad : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$
$$x \longmapsto \big(y \longmapsto ad(x)(y) = [x,y]\big)$$

<u>Esercizio</u>: Questa ad è una rappr. di L.

Lemma: Sia L alg. di Lie qualsiasi, $/k$ e $I \subseteq L$ un sottosp. vett.

I è un ideale $\iff$ I è un ad-sottomodulo.

Dim.: $\forall x \in L \ \forall y \in I$: $[x,y] \in I \iff ad(x)(y) \in I$.

□

Lemma: Sia $H \subseteq Gl(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso, $g \in Gl(n,\mathbb{R})$. Allora

$$Lie(gHg^{-1}) = Ad(g) \cdot Lie(H).$$

Dim.: $Ad(g) \cdot Lie(H) = g\, Lie(H)\, g^{-1} = \{ gXg^{-1} \mid e^{tX} \in H \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$

$$= \{ Y \mid \underbrace{e^{tg^{-1}Yg} \in H} \ \forall t \in \mathbb{R} \}$$

$\nwarrow$ equival. a $g^{-1}e^{tY}g \in H$, equival. a $e^{tY} \in gHg^{-1}$.

□

Teorema: Sia $G \subseteq Gl(n,\mathbb{R})$ un sgr chiuso, e $H \subseteq G$ un sgr chiuso

H è normale in $G \implies Lie(H)$ è un ideale di $Lie(G)$.

Se inoltre G e H sono connessi vale anche il viceversa, cioè
G, H connessi e $Lie(H)$ ideale di $Lie(G) \implies H$ è normale in G.

Dim.: 1) H normale in $G \implies Lie(H) \subseteq Lie(G)$ è un G-sottomodulo per Ad

(dim. simile a prima: $e^{tX} \in H \implies ge^{tX}g^{-1} \in H \ \forall t \in \mathbb{R}$)

$\implies$ è un $Lie(G)$-sottom. per ad.

2) Qui G e H sono connessi. Abb.:

$\mathrm{Lie}(H)$ ideale $\Rightarrow$ è $\mathrm{Lie}(G)$-sottomodulo per ad $\overset{(G \text{ connesso})}{\Longrightarrow}$ è G-sottomodulo per Ad: $\mathrm{Lie}(gHg^{-1}) = \mathrm{Lie}(H)$ $\forall g \in G$. Visto che H è connesso deduciamo $gHg^{-1} = H$ $\forall g \in G$.

□

con appl. bilineare $\beta : A \times A \to A$

Def.: Sia A un'algebra non nec. associativa su un campo. Una derivazione di A è un'appl. lineare $\delta : A \to A$ tale che
$$\delta(\beta(v,w)) = \beta(\delta(v), w) + \beta(v, \delta(w)) \quad \forall v, w \in A$$

Teorema: 1) Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ chiuso e $g \in G$. $\mathrm{Ad}(g) : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ è un automorfismo di algebre di Lie.

2) Sia L un'alg. di Lie qualunque su k campo, e $X \in L$
$\mathrm{ad}(X) : L \longrightarrow L$ è una derivazione dell'algebra L.

Dim.: 1) $g[X,Y]g^{-1} = gXYg^{-1} - gYXg^{-1} = [gXg^{-1}, gYg^{-1}]$.

2) $\mathrm{ad}(X)([Y,Z]) = [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] =$

$$= \left[Y, [X,Z] \right] + \left[[X,Y], Z \right] = \left[ad(X)(Y), Z \right] + \left[Y, ad(X)(Z) \right].$$

$\square$

Esercizi: 1) Sia $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ applicazione bilineare, e $\alpha: \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ derivabile con $\alpha(0) = I_n$. Dati $v, w \in V$, dimostrare che

$$\frac{d}{dt}\left(b(\alpha(t)v, \alpha(t)w)\right)\Big|_{t=0} = b(\alpha'(0)v, w) + b(v, \alpha'(0)w)$$

2) Sia $\mathcal{A}$ algebra su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, con appl. bilineare $\beta: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. Consid. $Aut(\mathcal{A}) = \{ f: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \mid f \text{ lineare}, f(\beta(v,w)) = \beta(f(v), f(w))\ \forall v, w \in \mathcal{A} \}$ gli automorfismi di $\mathcal{A}$.

Dim. che $Aut(\mathcal{A})$ è un sgr chiuso di $GL(\mathcal{A})$.

3) Dim. che $Lie(Aut(\mathcal{A})) = Der(\mathcal{A}) = \{\text{derivazioni di } \mathcal{A}\}$

4) Ridimostrare l'identità di Jacobi per $Lie(G)$, dove $G \leq GL(n,\mathbb{R})$ è un sottogr. chiuso, usando 3).

Definizione: Siano V, W due G-moduli, (sullo stesso campo k) dove G è un gruppo. Un omomorfismo di G-moduli è un'appl. lineare $f: V \to W$ tale che

$$g \underset{\text{in } W}{\cdot} f(v) = f(g \underset{\text{in } V}{\cdot} v) \qquad \forall g \in G,\ \forall v \in W.$$

In tal caso f si dice isomorfismo di G-moduli se f è anche biiettiva (e allora f^{-1} è anche isom.)

Analogam. si definiscono omomorfismi di L-moduli dove L è un'alg. di Lie.

ALGEBRE DI LIE

D'ora in poi: k = campo qualunque, ogni sp. vett. è su k, *di dimensione finita* (se non altrimenti specificato).

Def.: Sia L algebra di Lie.

1) Il *centro* $Z(L)$ è def. come il nucleo di ad, cioè

$$Z(L)=\{z\in L \mid [z,y]=0 \quad \forall y\in L\}$$

2) L'*algebra derivata* di L è

$$[L,L]=\mathrm{Span}\{[x,y] \mid x,y\in L\}$$

3) Dati due ideali I, J, il loro bracket è def. come

$$[I,J]=\mathrm{Span}\{[x,y] \mid x\in I,\ y\in J\}$$

Oss.: 1) $Z(L)$ è un ideale, infatti dati $z\in Z(L)$ e $x\in L$, abb $[z,x]=0\in Z(L)$.

2) Anche $[L,L]$ è un ideale, infatti dati $x,y\in L$ e $z\in L$, abb. $[[x,y],z]\in[L,L]$ ovviamente, e lo stesso vale se invece di $[x,y]$ mettiamo una comb. lin. di bracket di elt diversi.

3) Dati due ideali I, J, abb.:

a) $I+J$ è un ideale, perché $$[\underset{\in L}{x}, \overset{\in I}{y} + \underset{\in J}{z}] = \overbrace{[x,y]}^{\in I} + \overbrace{[x,z]}^{\in J}$$

b) $[I,J]$ è un ideale, perché $$[x,[y,z]] = \overbrace{(\underbrace{[x,y]}_{\in I}, z]}^{\in I} + \overbrace{[y, \underbrace{[x,z]}_{\in J}]}^{\in J}.$$

4) ATTENZIONE: se $K \subseteq L$ è sottoalg. di Lie opp. ideale, e $J \subseteq K$ è ideale <u>di K</u>, non è detto che J sia ideale <u>di L</u>.

<u>Esempi</u>: 1) $Z(\mathfrak{gl}(n)) = k \cdot I_n$ (esercizio importante!!)

2) $[\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)] = \mathfrak{sl}(2)$ se $\operatorname{char}(k) \neq 2$, infatti

prendiamo la base $$\left(e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

di $\mathfrak{sl}(2)$ (talvolta si usano le lettere x, h, y) e oss.:

$$[h,e] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2e$$

per cui $e = \frac{1}{2}[h,e] \in [\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)]$

$h = [e,f]$, $\quad [h,f] = -2f$ quindi $f = \frac{1}{2}[f,h]$.

3) $[\mathfrak{b}(n), \mathfrak{b}(n)] = \mathfrak{b}^u(n)$

<u>Dim</u>: $\underline{\subseteq}$) $$\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

quindi il bracket ha 0 sulla diag..

$\supseteq$] Esercizio: prendere una base di $\mathfrak{b}^u(n)$ e scrivere ogni elt come bracket di altri elem..

Def.: Sia L alg. di Lie. Se L non è abeliana, e i suoi unici ideali sono $\{0\}$, L, allora L si dice semplice.

Esempio: Se $\mathrm{char}(k) \neq 2$, allora $L = \mathfrak{sl}(2)$ è semplice.

Infatti sia $I \subseteq L$ ideale, supp. $I \neq \{0\}$.

Oss.: se $e \in I$ allora $[e,f] = h \in I$ e $f = \frac{1}{2}[f,h] \in I$

se $h \in I$ allora $e = \frac{1}{2}[h,e] \in I$

se $f \in I$ allora $h = [e,f] \in I$

Quindi $\boxed{\text{Se } e, f \text{ opp. } h \in I \text{ allora } I = L.}$

Sia ora

$0 \neq x = \alpha e + \beta h + \gamma f$ con $\alpha, \beta, \gamma \in k$.

$$\left.\begin{aligned} &[e,x] = -2\beta e + \gamma h, \quad [e,[e,x]] = -2\gamma e \\ &[f,x] = -\alpha h + 2\beta f, \quad [f,[f,x]] = -2\alpha f \end{aligned}\right\} \text{sono tutti elem. di } I$$

Se $\gamma \neq 0$ allora $e \in I$ e $I = L$

Se $\alpha \neq 0$ allora $f \in I$ e $I = L$

Rimane il caso $\gamma = \alpha = 0$, $\beta \neq 0$ ma allora $h \in I$ e $I = L$.

Def.: Se I è un ideale di L alg. di Lie, il quoziente

$$L/_{I} = \{ x + I \mid x \in L \}$$

(come gruppi additivi) ha una struttura naturale di spazio vettoriale ponendo $(x+I)+(y+I) = x+y+I$, $\lambda(x+I) = \lambda x + I$,

e di algebra di Lie,

ponendo $[x+I, y+I] = [x,y] + I$

Oss.: Il bracket su $L/_{I}$ è ben def., perché se $z \in I$ allora

$$x+z+I = x+I \quad \text{e abb.:}$$

$$[x+z+I, y+I] = [x+z, y]+I = [x,y] + \underbrace{[z,y]}_{\in I} + I = [x,y]+I$$

e stessa cosa per $[x+I, y+z+I]$.

Anche la str. di sp. vett. è ben def., con verifica simile.

Esercizio: Verificare che $L/_{I}$ soddisfa gli assiomi di sp. vett. e di algebra di Lie.

Def.: Dato $V \subseteq L$ sottosp. vett. di un'alg. di Lie L, definiamo il normalizzatore $N_L(V) = \{ x \in L \mid [x,v] \in V \ \forall v \in V \}$ e il centralizzatore $Z_L(V) = \{ x \in L \mid [x,v] = 0 \ \forall v \in V \}$ di V in L.

Ideali e omomorfismi

Prop.: 1) Se $\varphi : L \longrightarrow M$ è un omom. di alg. di Lie, $\ker(\varphi)$ è un ideale di L.

2) Dato $I \subseteq L$ ideale, allora $I = \ker(\pi)$ dove $\pi : L \longrightarrow L/I$.
$$x \longmapsto x+I$$

3) Dato $I \subseteq L$ ideale e $\varphi : L \longrightarrow M$ omomorfismo, allora

$I \subseteq \ker(\varphi) \iff$ esiste $\psi : L/I \longrightarrow M$ tale che

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & M \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $\varphi = \psi \circ \pi$.

4) $\left(L/I\right)/\left(J/I\right) \cong L/J$ tramite $\quad$ ($I \subseteq J \subseteq L$ entrambi ideali di L)

$(x+I) + \frac{J}{I} \longmapsto x + J \qquad (x \in L)$

Dim.: Esercizio.

Algebre di Lie risolubili e nilpotenti

Sia L un'alg. di Lie su un campo k.

Def.: La serie derivata di L è

$$L^{(0)} = L$$
$$L^{(1)} = [L, L]$$
$$L^{(2)} = [[L,L],[L,L]]$$
$$\vdots$$
$$L^{(m)} = \left[L^{(m-1)}, L^{(m-1)}\right] \qquad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

(ovviam. $L^{(m)} \subseteq L^{(m-1)}$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, per induzione)

La <u>serie centrale discendente</u> è

$L^0 = L$

$L^1 = [L, L]$

$L^2 = [L, [L, L]]$

$\vdots$

$L^m = [L, L^{m-1}]$ $\quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

(ovviam. $L^m \subseteq L^{m-1}$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, per induzione)

<u>Lemma:</u> 1) $L^{(m)} \subseteq L^m$

2) $L^{(m)}$ ed L^m sono ideali di L $\quad \Big\}\ \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

<u>Dim.:</u> 1) è ovvio

2) a) <u>$L^{(m)}$ per induz.</u>: segue da I, J ideali $\Rightarrow [I, J]$ ideale. Verifica diretta:

se $y \in L^{(m)}$ e $x \in L$, abb.

$$y = \sum_i [y_i, z_i] \quad , \quad y_i, z_i \in L^{(m-1)}$$

$$[x, y] = \sum_i [x, [y_i, z_i]] = \sum_i \Big([\underbrace{[x, y_i]}_{\substack{\in L^{(m-1)} \\ \text{per induz.}}}, \underset{\overset{\uparrow}{L^{(m-1)}}}{z_i}] + [\underset{\overset{\uparrow}{L^{(m-1)}}}{y_i}, \underbrace{[x, z_i]}_{\in L^{(m-1)} \text{ per induzione}}] \Big) \in [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}] = L^{(m)}$$

b) se $y \in L^m$ e $x \in L$ abb. $[x, y] \in [L, L^m] = L^{m+1} \subseteq L^m$.

$\square$

<u>Oss.:</u> Se $\varphi : L \to M$ è un omom., allora $\varphi(L^{(m)}) \subseteq M^{(m)}$ e $\varphi(L^m) \subseteq M^m$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Def.: L si dice risolubile se $\exists m \mid L^{(m)}=\{0\}$,

L si dice nilpotente se $\exists m \mid L^{m}=\{0\}$.

Oss.: L commutativa $\Rightarrow$ L nilpotente $\Rightarrow$ L risolubile.

Esempi: 1) $\mathfrak{sl}(2)=\mathfrak{sl}(2)^{1}=\mathfrak{sl}(2)^{(1)}\neq\{0\}$ se $\mathrm{char}(k)\neq 2$, quindi $\mathfrak{sl}(2)$ non è risolubile né nilpotente.

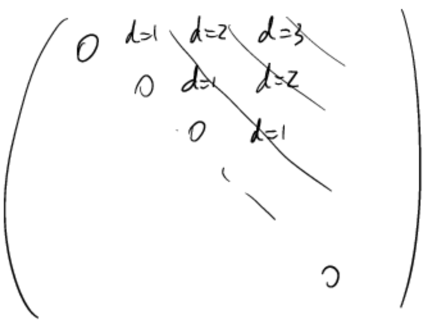
2) $\mathfrak{b}^{u}(n)$ è nilpotente, infatti siano

$$e_{ij}=\begin{array}{cc} \overset{\text{colonna } j}{\downarrow} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow \text{riga } i \\ (j>i)\end{array} \end{array}$$

allora
$$e_{ij}\cdot e_{st}=\begin{cases} 0 & \text{se } j\neq s \\ e_{it} & \text{se } j=s \end{cases}$$

per cui
$$[e_{ij},e_{st}]=\begin{cases} e_{it} & \text{se } j=s \ \ (\text{perché allora } i<j=s<t) \\ -e_{sj} & \text{se } i=t \ \ (\text{allora } s<t=i<j) \end{cases}$$

Interpretiamo $j-i$ come la „distanza" dell'1 dalla diagonale:



Osserviamo poi che nel primo caso $t-i=t-s+j-i>\max\{t-s,j-i\}$

e nel secondo caso $j-s=j-i+t-s>\max\{j-i,t-s\}$

Definiamo: $\mathrm{val}(x) = \begin{cases} \min\{\#\text{colonna} - \#\text{riga di tutte le entrate} \neq 0 \text{ di } x\} & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$

allora $\forall x \in \mathfrak{b}^u(n) : \mathrm{val}(x) \geq 1$

$\forall x \in [\mathfrak{b}^u(n), \mathfrak{b}^u(n)] : \mathrm{val}(x) \geq 2$

e per induzione: $\forall x \in \mathfrak{b}^u(n)^m : \mathrm{val}(x) \geq m+1$

Allora $\mathfrak{b}^u(n)^{n-1} = \{0\}$, perché se $x \in \mathfrak{gl}(n)$ soddisfa $\mathrm{val}(x) \geq n$ allora $x = 0$.

3) $\mathfrak{b}(n)$ è risolubile, perché $\mathfrak{b}(n)^{(1)} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)$, per cui

$$\mathfrak{b}(n)^{(2)} = [\mathfrak{b}(n)^{(1)}, \mathfrak{b}(n)^{(1)}] \subseteq [\mathfrak{b}^u(n), \mathfrak{b}^u(n)] = \mathfrak{b}^u(n)^{(1)} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)^1$$

e per induzione $\mathfrak{b}(n)^{(m)} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)^{m-1}$ $\forall m \geq 1$.

4) $\mathfrak{b}(n)$ non è nilpotente, perché $[\mathfrak{h}(n), \mathfrak{b}^u(n)] = \mathfrak{b}^u(n)$ (esercizio).

Proposizione: 1) Se L è risolubile, lo sono tutti i suoi quozienti e tutte le sue sottoalgebre.

2) Se I è un ideale risolubile e L/I è risolubile, allora L è risolubile.

3) Se I e J sono ideali risolubili, è risolubile anche $I+J$.

Dim.: 1) $K \subseteq L$ sottoalgebra $\Rightarrow K^{(m)} \subseteq L^{(m)}$ $\forall m \geq 0$

$I \subseteq L$ ideale $\Rightarrow (L/I)^{(m)} = \pi(L^{(m)})$ $\forall m \geq 0$

$(\pi : L \to L/I)$

2) L/I risolubile $\Rightarrow \exists\, m_0 \mid (L/I)^{(m_0)} = \{0 + I\}$

$\Rightarrow L^{(m_0)} \subseteq I$, e oss. $L^{(m_0+s)} \subseteq I^{(s)}$ per cui se anche I è risolubile segue L risolubile.

3) $$\frac{I+J}{I} \cong \underbrace{\frac{J}{I\cap J}}_{\text{risol. per 1)}} \underset{\text{per 2)}}{\Longrightarrow} I+J \text{ risolubile}$$ □

Esercizio: 1) Il 2) non vale per la nilpotenza, ad es. $b^u(n)$ è ideale nilpot. di $b(n)$, e $\frac{b(n)}{b^u(n)} \cong h(n)$ è abeliana $\Rightarrow$ nil pot., ma $b(n)$ non è nilpotente.

2) Il 3) vale anche per la nilpotenza, dimostrarlo.

$\Big((I+J)^n = \sum_{I_j \in \{I,J\}} [I_1,[I_2,[\dots[I_{n-1},I_n]\dots]$, e vale

$\dim [I,V] < \dim V \quad \forall V$ ssp. di I, analog. con J $\Big)$

Sia L alg. di Lie.

Corollario: Esiste un unico ideale risolubile massimale di L.

Dim.: Basta prendere la somma di tutti gli ideali risolubili. □

Def.: 1) L'ideale risolubile massimale si chiama *radicale* di L: $Rad(L)$.

2) Se $Rad(L) = \{0\}$ allora L si dice *semisemplice*.

Esercizio: $\forall L$: $L/_{Rad(L)}$ è semisemplice.

Proposizione: 1) Se L è nilpotente, sottoalgebre e quozienti sono nilpotenti.

2) Se $L/_I$ è nilpot. e $I \subseteq Z(L)$ allora L è nilpot.

3) Se $\overset{\neq\{0\}}{L}$ è nilpot. allora $Z(L) \neq \{0\}$.

Dim.: 1) $L^m \supseteq K^m$, $\left(L/_I\right)^m = \pi(L^m)$ $\quad (\pi : L \to L/_I)$

2) Sia m con $L/_I{}^m = \{0+I\}$, cioè $\pi(L^m) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$, cioè $L^m \subseteq I$. Ora $[L, L^m] \subseteq [L, I] \subseteq [L, Z(L)] = \{0\}$

3) Sia $L^m = \{0\}$ ma $L^{m-1} \neq \{0\}$, allora $[L, L^{m-1}] = \{0\}$ quindi $L^{m-1} \subseteq Z(L)$.

□

Oss.: 3) non vale per la risolubilità, ad es. $L = \mathfrak{b}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$ ha centro banale (esercizio: verificarlo almeno per $n = 2$).

Criteri di nilpotenza, risolubilità, semisemplicità.
(teo. Engel) (criterio di Cartan)

NILPOTENZA

Def.: Un elem. x di un'algebra di Lie L si dice ad-nilpotente se $\operatorname{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(L)$ è un endomorfismo nilpotente di L.

Es.: $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in sl(2)$:

$$[e,e]=0$$
$$[e,h] = -2e \Rightarrow [e,[e,h]] = 0$$
$$[e,f] = h \Rightarrow [e,[e,[e,f]]] = 0,$$

da cui $ad(e)^3 = 0$.

Teorema (Engel): Sia L alg. di Lie. Se $\forall x \in L$: x è ad-nilpotente, allora L è nilpotente.

Oss.: Confrontiamo la nilpotenza con la condiz. del teorema:

$\boxed{\text{Nilp.}}$ $\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \forall x_1, \ldots, x_{m+1} \in L : [x_1, [x_2, \ldots, [x_m, x_{m+1}] \cdots]] = 0$

$\boxed{\text{condiz. del teo.}}$ $\forall x \in L \; \exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \forall y \in L : \underbrace{[x, [x, \ldots, [x, y] ..]]}_{m} = 0$ ← sembra molto più debole!!

$\uparrow$ può dip. da x

Per la dim.: servono un lemma e un teo. ausiliari.

Lemma: Sia V sp. vett. e $x \in gl(V)$. Se x è nilpot. allora x è anche ad-nilpotente.

Dim. lemma: Consid. $\lambda_x : gl(V) \to gl(V)$, $y \mapsto xy$ e $\rho_x : gl(V) \to gl(V)$, $y \mapsto yx$.

Allora λ_x e ρ_x commutano e $ad(x) = \lambda_x - \rho_x$.

Segue: $$ad(x)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \lambda_x^j (-\rho_x)^{m-j}.$$

D'altronde $\lambda_x^j(y) = x^j y$, e simil. per ρ_x, quindi se $m \geq 2N$ con $x^N = 0$ allora $ad(x)^m = 0$.

□

Oss.: Applichiamo il ragionamento visto nella dim. al caso seguente.

Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ un'algebra di Lie, $M \subseteq L$ una sottoalgebra di Lie. Allora M agisce „tramite ad" non solo su M stessa:

$$\begin{aligned} ad: M &\longrightarrow \mathfrak{gl}(M) \\ y &\longmapsto [y,-]: x \longmapsto [y,x] \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

ma anche su tutta L. Cioè è def. la rappresentaz.

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathfrak{gl}(L) \\ y &\longmapsto \left([y,-]: x \longmapsto [y,x] \quad \boxed{\forall x \in L}\right) \end{aligned}$$

Non solo! Visto che $[y,M] \subseteq M$, quest'ultima rappresentazione „passa al quoziente" L/M, cioè induce la rappresentazione

$$\begin{aligned} \varphi: M &\longrightarrow \mathfrak{gl}(L/M) \\ y &\longmapsto \left(x+M \longmapsto [y,x]+M \right) \end{aligned}$$

Infine, vale: se $x \in M$ è nilpotente, anche $\varphi(x)$ è nilpotente, e si dimostra come nel lemma precedente

$(\varphi(y) =$ (moltipl. a sinistra per y) $\circ$ (moltipl. a destra per y) $)$.

Teorema (1° teo. di „punto fisso"): Sia $V\neq\{0\}$ sp. vett. e $L\subseteq\mathfrak{gl}(V)$ sottoalgebra di Lie. Se ogni elt di L è nilpotente, allora
$\exists v_0\in V\setminus\{0\} \mid x.v_0=0 \quad \forall x\in L$.

Dim.: Per induzione su $\dim(L)$.
Base: $\dim(L)=0$; allora $L=\{0\}$ e il teo. è ovvio.
Esercizio: dim. il caso $\dim(L)=1$.

Passo induttivo: Sia $L\neq\{0\}$, allora L ha sottoalgebre di Lie proprie $(\subsetneq L)$, ad es. $\{0\}\subsetneq L$. Sia $M\subsetneq L$ sottoalgebra propria massimale.

1) Dim. che $\dim(M)\overset{(?)}{=}\dim(L)-1$. Consid. $y\in M$, $z\in M$: $[y,z]\in M$, cioè $ad(y)(M)\subseteq M$. Segue che $ad(y): \begin{matrix} L\to L \\ x\mapsto [y,x]\end{matrix}$ passa al quoziente

$$\begin{matrix} L/M \to L/M \\ x+M \mapsto [y,x]+M \end{matrix}$$

e questo def. una rappresentazione

$$\varphi: M \to \mathfrak{gl}(L/M) \quad (\neq\{0\})$$
$$y \longmapsto \big(x+K \mapsto [y,x]+M\big)$$

Per l'osservaz. prec.: $\varphi(K)$ è fatto da elem. nilpotenti.

Abb.: $\dim(\varphi(M)) \leq \dim(M) < L$, quindi usiamo l'induz. e concludiamo $\exists x_0+M\in L/M \mid \forall y\in M$: $\underbrace{\varphi(y)(x_0+M)}_{\nwarrow = [y,x_0]+M} = 0+M$, $x_0+M\neq 0+M$.

cioè $[y,x_0]\underset{\forall y\in M}{\in M}$ ma $x_0\notin M$.

Segue: $M \oplus kx_0$ è una sottoalgebra di L, da cui $M \oplus kx_0 = L$.

Allora $[\underbrace{\overset{M}{y}+\overset{k}{a}x_0}_{\in L}, \underset{M}{\overset{}{z}}] = \underbrace{[y,z]}_{\overset{\cap}{M}}+a\underbrace{[x_0,z]}_{\overset{\parallel}{0}} \in M$, cioè M è un *ideale* di L.

2) Conclusione della dim. Per induzione, visto che $\dim(M) < \dim(L)$, abb.

$$W = \{w \in V \mid M.w = \{0\}\} \quad \text{è} \quad \neq \{0\}.$$

Inoltre W è L-stabile, infatti dato $x \in L$ e $w \in W$, abb.

$$y.x.w = x.\underbrace{y.w}_{0} - \underbrace{[x,y]}_{\in M}.w = 0-0=0 \quad \forall y \in M, \text{ cioè}$$

$$x.w \in W \quad \forall x \in L.$$

Infine: $x_0|_W : W \longrightarrow W$ è nilpotente, quindi ha nucleo $\neq \{0\}$:

$$\exists v_0 \in W \setminus \{0\} \mid x_0 v_0 = 0.$$

Segue: $(y+ax_0).v_0 = yv_0 + a x_0 v_0 = 0$, cioè v_0 è il vett. cercato.

$\square$

Corollario: Nelle ip. del teorema di „punto fisso", c'è una base di V tale che $L \,(\subseteq gl(V) \cong gl(n))$ è cont. in $b^u(n)$. In particolare c'è una *bandiera* di sottospazi $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$ con $\dim V_i = i$ e V_i L-sottomodulo $\forall i$.

Dim. corollario: Iniziamo ponendo $V_1 = k\underset{\nwarrow \text{dal teorema}}{v_0}$, e

completiamo v_0 ad una base. Allora in quella base $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ le matrici $x \in L$ assumono la forma

$$x = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\tilde{x}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Le sottomatrici $\tilde{x}$, al variare di $x \in L$, formano una sottoalg. di Lie $\tilde{L} \subseteq \mathfrak{gl}(n-1)$.

Per induz., possiamo cambiare la base $(v_1, \dots, v_{n-1})$ in modo che $\tilde{L} \subseteq \mathfrak{b}^u(n-1)$, cosicché $L \subseteq \mathfrak{b}^u(n)$. Infine, basta porre $V_i := \operatorname{span}\{v_0, \dots, v_{i-1}\}$.

□

Dim. Teo. di Engel Poss. supporre $L \neq \{0\}$, procediamo per induz. su $\dim(L)$.

Per il lemma, $\operatorname{ad}(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ è fatta di elem. nilpotenti.
Per il teo. di „punto fisso": $\exists\, x_0 \in L \setminus \{0\} \mid x_0$ è annullato da ogni elem. di $\operatorname{ad}(L)$, cioè $Z(L) \neq \{0\}$.

Consid. $L/_{Z(L)}$: è fatta di elem. ad-nilpotenti (esercizio: verificarlo), per induzione è nilpotente. Segue: L nilpotente.

□

Attenzione: $\boxed{\text{D'ora in poi } k = \bar{k}, \quad \mathrm{char}(k) = 0.}$

RISOLUBILITA'

Teorema ("di pto fisso" n. 2): Sia V sp. vett., $L \in \mathfrak{gl}(V))$ sottoalg. risolubile.

Se $V \neq \{0\}$ allora esiste un autovett. comune a tutti gli elt di L.

Dim.: Induzione su $\dim(L)$: se $L = \{0\}$ è ovvio. Supp. $L \neq \{0\}$.

1) Troviamo M come prima. Sappiamo $[L,L] \subsetneq L \neq \{0\}$, inoltre ogni sottosp. vett. di L contenente $[L,L]$ è un ideale! (esercizio) Scegliamo M sottosp. vett. di L contenente $[L,L]$ e di codim. 1 in L. Allora M è un ideale, e poss. scrivere $L = M + k x_0$ con $x_0 \in L \setminus M$.

2) Autovett. simultaneo per M: per induzione, $\exists u \in V \setminus \{0\} \mid y.u = \lambda(y).u$ $\forall y \in M$, dove $\lambda(y) \in k$. Consid.

$$W = \{w \in V \mid y.w = \lambda(y).w \ \forall y \in M\} \quad (\ni u)$$

3) Dim. che $L.W \overset{(?)}{\subseteq} W$, cioè W è un L-sottomodulo. Sicuramente $M.W \subseteq W$, consid. x_0. Dati $w \in W$ e $y \in M$, abb.

$$y.x_0.w = \underbrace{x_0.y.w}_{\overset{\shortparallel}{\lambda(y).x_0 w}} - \underbrace{[x_0,y]w}_{\nwarrow \ \overset{\textcircled{?}}{=} 0}$$

Ora: $[x_0, y] \in M$, quindi $[x_0, y] w = \lambda([x_0, y]) w$, e dobb. dim. che λ è zero sui commutatori. Lo vediamo dimostrando che λ essenzialm. è una „traccia".

Sia $w \in W \setminus \{0\}$ e consid. $w, x_0 w, x_0^2 w, \dots,$ e poniamo

$W_0 = \{0\}$, $W_1 = \mathrm{Span}\{w\}, \dots, W_i = \mathrm{Span}\{w, x_0 w, \dots, x_0^{i-1} w\}, \dots, W_m$

dove W_m è l'ultimo in cui quei vettori sono lin. indipendenti. Oss $x_0 W_{i-1} \subseteq W_i$ $\forall i > 0$.

Dimostriamo per induzione su i che $\forall y \in M$: $y x_0^i w = \lambda(y) x_0^i w + (\text{vett. in } W_{i-1})$.

Da questo segue in particolare che $y W_i \subseteq W_i$ $\forall i \geq 0$. I casi $i = 0$, $i = 1$ sono ovvi, sia allora $i > 1$ e calcoliamo:

$$y x_0^i w = x_0 y x_0^{i-1} w + \underbrace{[y, x_0]}_{\in M} x_0^{i-1} w \underset{\substack{\uparrow \\ \text{induz.}}}{=} x_0 \left(\lambda(y) x_0^{i-1} w + \text{vett. in } W_{i-2} \right) + (\text{vett. in } W_{i-1}) =$$

$$= \lambda(y) x_0^i w + \underbrace{x_0 (\text{vett. in } W_{i-2})}_{\in W_{i-1}} + (\text{vett. in } W_{i-1}) = \lambda(y) x_0^i w + (\text{vett. in } W_{i-1}).$$

Calcoliamo la matrice di $y|_{W_i}$ rispetto alla base $(w, x_0 w, .., x_0^{i-1} w)$ per $i \leq m$:

$$\left. \begin{pmatrix} \lambda(y) & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda(y) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda(y) \end{pmatrix} \right\} i$$

cioè $m \cdot \lambda(y) = \mathrm{tr}(y|_{W_m})$.

Riassumiamo: W_m è stabile pe M e per x_0, e dato $y \in M$ abb. $m \cdot \lambda(y) = \mathrm{tr}(y|_{W_m})$. Questo si applica anche a $[y, x_0]$:

$$n \cdot \lambda\left([y,x_0]\right) = tr\left([y,x_0]\Big|_{W_n}\right) \underset{\substack{\text{ha senso} \\ \text{perché } x_0 W_n \subseteq W_n \text{ e } y W_n \subseteq W_n}}{=} tr\left([y|_{W_n}, x_0|_{W_n}]\right)$$

ma la traccia di un commutatore è nulla, quindi $n \cdot \lambda\left([y,x_0]\right) = 0$.

Visto che $char(k)=0$, segue $\lambda([y,x_0])=0$, da cui

$$y x_0 w = \lambda(y) x_0 w$$

cioè $x_0 W \subseteq W$, e allora $LW \subseteq W$.

4) Fine della dim. Visto che $k = \bar{k}$, x_0 ha un autovettore $\overset{v \neq 0}{v}$ in W, che è fatto da autovettori simultanei per M. Segue che v è autovettore per tutti gli elem. di L. □

Corollario (Teorema di Lie): Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ risolubile. Esiste una base di V tale che $L \subseteq \mathfrak{b}(n)$, identificando $\mathfrak{gl}(V)$ con $\mathfrak{gl}(n)$.

Dim.: Per induzione su $\dim(V)$, per il 2° teo. di pto fisso ogni $x \in L$ ha matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(x) & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

rispetto a una base $(v_1, \ldots, v_n)$ dove v_1 è autovett. simultaneo per L. □

Oss.: Confrontiamo il teo. di Lie con quello di Engel. Data $L \subseteq \mathfrak{gl}(n)$ nilpotente, non è detto che i suoi elem. siano matrici nilpotenti, ad es. se L ha dim. 1 allora è automaticam. nilpotente. Il teo. di Engel allora non dice nulla, non si può concludere ad es. che $L \subseteq \mathfrak{b}^u(n)$ in una base. Però L è in particolare risolubile, quindi $L \subseteq \mathfrak{b}(n)$ in una base.

Corollario: Sia L risolubile. Allora c'è una catena di ideali $\{0\} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_n = L$ con $\dim(L_i) = i$ e L_i ideale di L $\forall i$.

Dim.: Basta considerare $ad(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$, c'è una catena di sottosp. $L_i \subseteq L$ con $ad(L)\, L_i \subseteq L_i$, cioè $[L, L_i] \subseteq L_i$.

$\square$

Corollario: Sia L alg. di Lie. L è risolubile $\iff [L,L]$ è nilpotente.

Sup. L risolubile.

Dim.: $\Rightarrow$ Sia $x_1, \dots, x_n$ base di L in cui $ad(L)$ è fatta da matr. triang. sup.. Allora $ad(L) \subseteq \mathfrak{b}(n)$, $\underset{\underset{ad([L,L])}{\shortparallel}}{[ad(L), ad(L)]} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)$,

quindi
$$ad([L,L]) \cong \frac{[L,L] + \ker(ad)}{\underbrace{\ker(ad)}_{=Z(L)}} \cong \frac{[L,L]}{[L,L] \cap Z(L)}$$
è nilpotente, segue $[L,L]$ nilpotente.

$\Leftarrow$ Se $[L,L]$ è nilpotente allora è risolubile, e $\frac{L}{[L,L]}$ è abeliana, quindi L è risolubile.

$\square$

Oss.: il criterio di Cartan (di risolubilità) si basa sulla seguente osservazione: data $L \subseteq gl(V)$ risolubile, allora in una qualche base di V vale $L \subseteq b(n) (\subseteq gl(n) \cong gl(V))$, e vale $[L,L] \subseteq [b(n), b(n)] = b^u(n)$. Da questo segue: $\forall x \in L \; \forall y \in [L,L]: \boxed{xy \in b^u(n)}$.

Attenzione: il prodotto xy è in $b^u(n)$ ma non è detto che sia in L. L'idea è quella di osservare che ovviamente

$$tr(xy)=0 \qquad (\forall x \in L, \forall y \in [L,L]) \qquad (*)$$

Questa condizione sembra una conseguenza banale della risolubilità e anche „debole", tuttavia il criterio di Cartan dirà che $(*)$ è equivalente alla risolubilità di L.

Per dimostrare che $(*) \Rightarrow L$ risolubile dimostreremo che $(*) \Rightarrow [L,L]$ nilpotente usando il teo. di Engel.

Per dimostrare che tutti gli elem. di $[L,L]$ sono nilpotenti useremo la decomposizione di Jordan-Chevalley, che vediamo in una parentesi di algebra lineare.

PARENTESI DI ALGEBRA LINEARE

Sia V sp. vett. di dim. finita su k. (Ricordiamo: $k = \overline{k}$.)

<u>Def</u>: $v \in V \setminus \{0\}$ è <u>autovettore generalizzato</u> di autovalore $\alpha \in k$ per $T : V \to V$ lineare se $\exists m \geq 1 \mid (T - \alpha)^m \cdot v = 0$.

Definiamo anche l'<u>autospazio generalizzato</u> relativo ad $\alpha \in k$ qualsiasi:

$V_\alpha = \{ v \in V \mid \exists m \geq 1 \mid (T-\alpha)^m v = 0 \}$.

<u>Oss.</u>: V_α è def. $\forall \alpha \in k$; se non ci sono autovett. gen. di autoval. α allora $V_\alpha = \{0\}$.

<u>Teorema</u> (decomp di Fitting): Dato T, abb. $V = \bigoplus_{\alpha \in k} V_\alpha$.

Per la dim.:

<u>Lemma</u>: Sia $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ t.c. $\operatorname{Im}(T^m) = \operatorname{Im}(T^{m+1})$, $\ker(T^m) = \ker(T^{m+1})$. Allora $V = \operatorname{Im}(T^m) \oplus \ker(T^m)$, e

$T|_{\operatorname{Im}(T^m)} : \operatorname{Im}(T^m) \to \operatorname{Im}(T^m)$ è invertibile,

$T|_{\ker(T^m)} : \ker(T^m) \to \ker(T^m)$ è nilpotente.

<u>Dim.</u>: $+\rfloor$ Sia $v \in V$, dobb. trovare $u, w \in V$ t.c. $u = T^m u'$ e $T^m w = 0$, e $v = u + w$.

Per trovare u' e w osserviamo che $T^m(u+w) = T^{2m}u' + T^m w$

e quindi $\boxed{T^m v = T^{2m} u'}$. Oss.: da T^m in poi ho sempre la stessa immagine, che contiene $T^m v$:

$$\begin{tikzcd} Im(T^m) \arrow[r, "T"] & Im(T^{m+1}) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & Im(T^{2m-1}) \arrow[r, "T"] & Im(T^{2m}) \end{tikzcd}$$

tutti uguali, e su di essi

T è invertibile!

Poniamo allora $S = T|_{Im(T^m)} : Im(T^m) \longrightarrow Im(T^m) = Im(T^{m+1})$ e

poniamo $u' = S^{-2m}(T^m v)$ e $u = T^m u'$. Allora $T^{2m} u' = T^m u = T^m v$.

Abbiamo: $u \in Im(T^m)$. Poniamo infine $w = v - u$.

Abbiamo $T^m w = T^m v - T^{2m} u' = 0$, cioè $w \in Ker(T^m)$.

Segue: $V = Ker(T^m) + Im(T^m)$.

$\oplus$| S^m è iniettiva, per cui T^m "non ha nucleo" in $Im(T^m)$,

cioè $Ker(T^m) \cap Im(T^m) = \{0\}$

Rimane solo da oss. che $T|_{Ker(T^m)}$ è ovviamente nilpotente.

$\square$

Dim. Teorema di Fitting: Possiamo supporre $V \neq \{0\}$.

Sia α un autovalore di T, esiste perché $k = \bar{k}$.

Applichiamo il lemma a $T - \alpha \mathrm{Id}_V$, e osserviamo che $V_\alpha = \ker\left((T-\alpha \mathrm{Id}_V)^m\right)$ per m abb. grande.

Per il lemma:

$$V = \overset{\neq\{0\}}{V_\alpha} \oplus \underset{\nwarrow \mathrm{Im}\left((T-\alpha\mathrm{Id}_V)^m\right)}{W}$$

Oss. che W è stabile per $T-\alpha \mathrm{Id}_V$, quindi è stabile per T. Procediamo per induzione su $\dim(V)$, applicando il teorema a $T|_W : W \to W$. Otteniamo

$$V = V_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in k} W_\beta \right)$$

Rimane da dim. $W_\beta = V_\beta \quad \forall \beta \in k \setminus \{\alpha\}$, e che $W_\alpha = \{0\}$: <u>esercizio</u>.

(suggerim.: V_β è il più grande sottosp. vett. su cui T ha polinomio minimo che è una potenza di $\underset{\uparrow \text{variable}}{x} - \beta$)

$\square$

<u>Teorema</u> (decomposizione di Jordan-Chevalley): Sia $T: V \to V$ come prima. Esistono $T_n, T_s : V \to V$ lineari tali che

1) T_n nilpotente, T_s semisemplice (= <u>diagonalizzabile</u>),

2) $T = T_n + T_s$,

3) $T_n T_s = T_s T_n$,

4) esistono polinomi $p, q \in k[x]$ senza termine noto tali che
$T_s = p(T)$, $T_n = q(T)$.

Dimostrazione: Poss. supp. $V \neq \{0\}$, consid. α autovalore di T.

Abb. $(T - \alpha Id_V)\Big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V_\alpha$ è nilpotente,
quindi c'è una base di V_α in cui ha matrice in $\mathcal{B}^u(\dim(V_\alpha))$.
Applicato ad ogni $\alpha \in k$, otteniamo una base di V in cui T ha matrice

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}\alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_1\end{matrix}} & & & 0 \\
& \boxed{\begin{matrix}\alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_2\end{matrix}} & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & \boxed{\begin{matrix}\alpha_l & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_l\end{matrix}}
\end{pmatrix}$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ gli autoval. di T.

Poniamo allora $T_s =$ la matr. diag. con $\alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \dots, \alpha_l$, e $T_n = T - T_s$. Segue: T_s semisemplice, T_n nilpotente, T_s e T_n commutano.

4) Cerchiamo $p(x) \in k[x]$, usando il teorema cinese dei resti in $k[x]$: dati polinomi $a_1, \dots, a_l \in k[x]$ primi fra loro, abb.

$$\frac{k[x]}{(a_1 \cdots a_\ell)} \longrightarrow \frac{k[x]}{(a_1)} \oplus \text{—} \oplus \frac{k[x]}{(a_\ell)}$$

$$f + (a_1 \cdots a_\ell) \longmapsto \left(f + (a_1) \ , \text{—} , \ f + (a_\ell) \right)$$

è un isomorfismo lineare (dim.: esercizio, sugg.: è iniettiva e gli sp. vett. hanno la stessa dimensione).

Applichiamolo ai polinomi $(x-\alpha_1)^{m_1}, \dots, (x-\alpha_\ell)^{m_\ell}$ dove m_i è tale che $(T-\alpha_i)^{m_i} \equiv 0$ su V_{α_i}, e all'elem.

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \bigoplus_{i=1}^{\ell} \frac{k[x]}{((x-\alpha_i)^{m_i})} .$$

Otteniamo che esiste un polinomio $p(x)$ tale che

$$p(x) \equiv \alpha_i \qquad \bmod (x-\alpha_i)^{m_i}$$

Possiamo anche richiedere in più che $p(x) \equiv 0 \bmod x$; se 0 è fra gli autovalori allora questa condizione già c'è, altrim. mettiamo 0 come valore aggiuntivo $\alpha_{\ell+1}$.

Abbiamo: $$p(T)\Big|_{V_{\alpha_i}} = \alpha_i \cdot Id_{V_{\alpha_i}} + \underbrace{(T-\alpha_i)^{m_i}\Big|_{V_{\alpha_i}}}_{\overset{\parallel}{0}} \cdot \tilde{p}(T)\Big|_{V_{\alpha_i}}$$

cioè $p(T)$ coincide con $\alpha_1 \cdot Id_{V_{\alpha_1}}$ su V_{α_1}, con $\alpha_2 \cdot Id_{V_{\alpha_2}}$ su V_{α_2}, ecc.... Quindi $p(T)$ coincide con T_S.

$\square$

Corollario: Sia T come nel teorema, allora T_s e T_n sono univocam. determinati dalle propr. 1), 2), 3).

Dim.: Siano T_s', T_n' che soddisfano 1), 2), 3). Allora commutano con T, quindi commutano con T_s, T_n del teorema perché quelli soddisfano anche 4).

Segue: a) $T_n - T_n'$ nilpotente

b) $T_s - T_s'$ semisemplice

(infatti sono diagonalizz. e commutano $\Rightarrow$ sono diagonalizzabili simultaneamente, cioè c'è una base di autovettori comuni a entrambi)

Ma $T_n - T_n' = T_s - T_s'$, e l'unico endomorfismo nilpotente semisemplice è quello nullo, per cui $T_n = T_n'$ e $T_s = T_s'$. $\square$

FINE PARENTESI DI ALGEBRA LINEARE

Teorema (criterio di Cartan): Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ algebra di Lie. Supp. $tr(xy)=0$ $\forall x \in L, \forall y \in [L,L]$. Allora L è risolubile.

Per la dim.:

Lemma 1: Sia $x \in \mathfrak{gl}(V)$ come nel teo, consid. $ad(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$.
Vale $ad(x_s) = ad(x)_s$, $ad(x_n) = ad(x)_n$

Dim.: Abb. $ad(x) = ad(x_s) + ad(x_n)$ e commutano, cioè
$ad(x_s) \circ ad(x_n) = ad(x_n) \circ ad(x_s)$ (verifica facilissima).
Sappiamo già che $ad(x_n)$ è nilpotente, rimane da dim. che $ad(x_s)$ è semisemplice. Scegliendo una base di V in cui x_s è diagonale, mettiamo

$$x_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{gl}(V)$$

consid. la base di $\mathfrak{gl}(n)$ delle matrici elem. e_{ij}.

Allora $ad(x_s)(e_{ij}) = x_s e_{ij} - e_{ij} x_s = (\alpha_i - \alpha_j) e_{ij}$

cioè $ad(x_s)$ è diagonale risp. a questa base, con autoval. $\alpha_i - \alpha_j$ di e_{ij}. Segue: $ad(x_s)$ è semisemplice, e allora $ad(x_s) = ad(x)_s$, $ad(x_n) = ad(x)_n$ per l'unicità della decomp. di J.-C.

□

Lemma 2: Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ alg. di Lie, e sia

$M = \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, L] \subseteq [L,L] \}$. Se $y \in M$ soddisfa

$tr(zy) = 0 \quad \forall z \in M$ allora y è nilpotente.

Oss.: Il lemma vale più in generale, con $A \subseteq B$ sottosp. vett. qualsiasi e
$M = \{ x \in gl(V) \mid [x, B] \subseteq A \}$.

Dim.: Dobb. dim. $y_s = 0$, poss. supporre y_s diagonale:

$$y_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}$$

Idea: cercare tanti z con cui dare condizioni su y_s.

Oss.: $ad(y)(L) \subseteq [L,L]$, quindi $ad(y)_s(L) \subseteq [L,L]$ (perché $ad(y)_s$ è un polinomio in $ad(y)$), e dal lemma 1 segue $ad(y_s)(L) \subseteq [L,L]$.

Idea: questo produce altri elem. che mandano L in $[L,L]$, basta prendere un qualsiasi polinomio $f \in k[x]$ senza termine noto, e osservare che allora anche $f(ad(y_s))(L) \subseteq [L,L]$. Fra l'altro, un tale $f(ad(y_s))$ commuta con $ad(y)$ e con $ad(y_n)$, perché y, y_s, y_n commutano, quindi commutano anche $ad(y)$, $ad(y_s)$, $ad(y_n)$.

Cerchiamo ora di esprimere $f(ad(y_s))$ come $ad(z)$ per qualche $z \in \mathfrak{gl}(V)$, perché allora avremo trovato un $z \in M$.

Oss.: nella base e_{ij} delle matrici elementari, $ad(y_s)$ è diagonale con autovalori $\alpha_i - \alpha_j$ (v. dim. Lemma 1), e quindi $f(ad(y_s))$ è diagonale con autovalori $f(\alpha_i - \alpha_j)$.

La cosa più semplice sembrerebbe usare la stessa cosa anche per trovare z, cioè prendere $z = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$ diagonale,

così anche $ad(z)$ è diagonale con autovalori $\beta_i - \beta_j$, e

scegliere $\beta_1, \dots, \beta_n$ tali che $f(\alpha_i - \alpha_j) = \beta_i - \beta_j$.

In questo modo $f(ad(y_s)) = ad(z)$, e $z \in M$.

Vediamo se un tale z sarebbe utile per dire qualcosa su y_s.

Intanto z e y_s commutano (sono entrambe diagonali). Poi

$ad(z)$ è un polinomio in $ad(y_s)$, che è un polinomio in $ad(y)$,

quindi $ad(z)$ e $ad(y)$ commutano.

Segue: $[z, y] \in \ker(ad) = Z(gl(V))$. D'altronde $[z,y] \in$

$[gl(V), gl(V)] = sl(V)$, e $Z(gl(V)) \cap sl(V) = \{0\}$, quindi

z commuta anche con y, e allora anche con y_n.

A questo punto cerchiamo di sfruttare l'ipotesi $tr(yz) = 0$:

$$0 = tr(zy) = tr(z(y_s + y_n)) = tr(zy_s) + tr(\overset{\text{nilpotente}}{\overbrace{zy_n}}) =$$

$$= tr(zy_s) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n .$$

Sembra promettente per dim. che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, ma dobb.

capire per quali $\beta_1, \dots, \beta_n$ funziona tutto, e anche per quali

polinomi f. Non siamo liberi di scegliere i β_i a piacere,

perchè se $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_l - \alpha_r$ allora $f(\alpha_i - \alpha_j) = f(\alpha_l - \alpha_r)$

e deve valere $\beta_i - \beta_j = \beta_l - \beta_r$. Cioè la „relazione lineare su $\mathbb{Z}$" $\alpha_i - \alpha_j - \alpha_l + \alpha_r = 0$ deve valere anche per $\beta_i, \beta_j, \beta_l, \beta_r$. Questa è in realtà l'unica condizione su $\beta_1, \dots, \beta_n$, perché se è verificata allora sicuram. esiste f polinomio tale che $f(\alpha_i - \alpha_j) = \beta_i - \beta_j$.

Un modo di assicurare che $\beta_1, \dots, \beta_n$ rispettano questa condizione è sceglierli in modo „$\mathbb{Q}$-lineare" rispetto a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, cioè consid. un'appl. $\mathbb{Q}$-lineare $\eta : \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ e porre $\beta_i = \eta(\alpha_i)$ $\forall i$. Allora se $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_l - \alpha_r$ vale $\beta_i - \beta_j =$

$$= \eta(\alpha_i) - \eta(\alpha_j) = \eta(\alpha_i - \alpha_j) = \eta(\alpha_l - \alpha_r) = \eta(\alpha_l) - \eta(\alpha_r) = \beta_l - \beta_r.$$

Quindi $\forall \eta$ vale $0 = \alpha_1 \eta(\alpha_1) + \dots + \alpha_n \eta(\alpha_n)$. Non è difficile concludere a questo punto che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, ma facciamolo con un <u>ultimo trucco</u>: applichiamo η, ottenendo $\eta(\alpha_1)^2 + \dots + \eta(\alpha_n)^2 = 0$, cioè $\eta = 0$. Ma se $\eta = 0$ $\forall \eta$ allora $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{0\}$, cioè $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, e concludiamo $y_s = 0$

$\square$

<u>Dim. criterio di Cartan</u>: Dim. che $[L, L]$ è nilpotente col teorema di Engel.

Usiamo il Lemma 2:

$M = \{ z \in \mathfrak{gl}(V) \mid [z, L] \subseteq [L, L] \}$, e oss. $M \supseteq L$.

Sappiamo che $tr(xy) = 0$ $\forall x \in L$, $\forall y \in [L, L]$. Per usare il lemma, abb. bisogno di $tr(zy) = 0$ $\forall z \in M$. D'altronde

$$\mathrm{tr}(z\underset{\substack{\uparrow\\ \in[L,L]}}{y}) = \mathrm{tr}\Big(z\cdot\sum_i [\underset{\substack{\uparrow\\ L}}{u_i}, \underset{\substack{\uparrow\\ L}}{w_i}]\Big) \underset{\uparrow}{=} \sum_i \mathrm{tr}([z,u_i]w_i) =$$

$\Big($ $\mathrm{tr}(a\cdot[b,c]) = \mathrm{tr}([a,b]\cdot c)$, verifica per esercizio $\Big)$

$= 0$ perché $[z,u_i]\in[L,L]$ (visto che $z\in M$) e $w_i\in L$.

Allora il Lemma 2 si applica a y, cioè y è nilpotente $\forall y\in[L,L]$. Per il Teorema di Engel, $[L,L]$ è nilpotente. Allora L è risolubile (Corollario al 2° teorema di „punto fisso").

Corollario: Sia L alg. di Lie. Se $\mathrm{tr}(ad(x)ad(y))=0$ $\forall x\in L$, $\forall y\in[L,L]$, allora L è risolubile.

Dim.: Basta applicare il criterio di Cartan a $ad(L)$, ottenendo $ad(L)\cong\dfrac{L}{Z(L)}$ risolubile, da cui L risolubile. □

SEMISEMPLICITA'

Usiamo:

Def: Sia L algebra di Lie. La forma di Killing è

$$\begin{aligned} K_L : L \times L &\longmapsto k \\ (x, y) &\longmapsto tr\big(ad(x)\, ad(y)\big) \end{aligned}$$

Oss.: 1) K_L è una forma bilineare

2) K_L è associativa, nel senso che

$$K_L\big(x, [y,z]\big) \underset{\uparrow}{=} K_L\big([x,y], z\big) \qquad \forall x,y,z \in L$$

verifica: esercizio

Esempio: $K_{sl(2)}$: Nella base (e, h, f) di $sl(2)$ abb.

$$ad(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ e la matrice di $K_{sl(2)}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sarà utile confrontare la forma di Killing di un'alg. di Lie L e quella di un suo ideale qualsiasi $I \subseteq L$:

Lemma: Sia L alg. di Lie con forma di Killing $K_L : L \times L \to k$, e sia $I \subseteq L$ ideale con forma di Killing $K_I : I \times I \longrightarrow k$.

Allora $K_I = K_L\big|_{I \times I}$.

__Dim.:__ Dato $x \in I$, $ad(x)$ manda tutta L in I, quindi $ad(x)$ ha matrice

$$\left(\begin{array}{c:c} \boxed{ad(x)|_I} & * \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \underset{\text{base di } I}{\longleftrightarrow}$$

. Anche $ad(x)ad(y)$ ha forma così a blocchi, se $x,y \in I$, per cui $tr(ad(x)ad(y)) =$
$= tr(ad(x)|_I \, ad(y)|_I)$.

$\square$

La forma di Killing fornisce un criterio di semisemplicità:

__Teorema:__ L semisemplice $\iff K_L$ non degenere.

__Dim.:__ Def. $R = \{x \in L \mid K_L(x,y) = 0 \ \forall y \in L\}$

R è un ideale di L, infatti se $x \in R$ e $z \in L$ allora

$K_L([x,z], y) = K_L(x, [z,y]) = 0 \quad \forall y \in L$, per cui $[x,z] \in R$.

Inoltre R è risolubile per il criterio di Cartan, $R = \{0\}$ se e solo se K_L è nondegenere.

$\Rightarrow\!|$ Se L è semis. allora $(R \subseteq)\, Rad(L) = \{0\}$.

$\Leftarrow\!|$ Supp. $R = \{0\}$, sia $Rad(L) \neq \{0\}$ per assurdo.

Allora $Rad(L)^{(i)}$ è un ideale __di L__ $\forall i \geq 0$ (dim. per induzione: esercizio). Segue: l'ultimo termine nonnullo della serie derivata di $Rad(L)$ è un ideale $I \neq \{0\}$ abeliano di L. Vogliamo dim. che $I \subseteq R$, sarebbe l'assurdo cercato.

Prendiamo $x \in I$, $y \in L$ e calcoliamo $K_L(x,y)$, vedendo cosa fa $ad(x)ad(y)$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "ad(y)"] & L \arrow[r, "ad(x)"] & I \arrow[r, "ad(y)"] & I \arrow[r, "ad(x)"] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Quindi $ad(x)ad(y)$ è nilpotente, per cui $K_L(x,y)=0$. Assurdo, quindi L è semisemplice.

$\square$

Def: Date L_1, L_2 algebre di Lie (qualsiasi), la somma diretta $L_1 \oplus L_2$ è un'algebra di Lie sullo sp. vett. $L_1 \times L_2$ e bracket $[(a,b),(c,d)] = ([a,c],[b,d])$

Oss.: L_1 identif. con $L_1 \times \{0\}$ e L_2 identificata con $\{0\} \times L_2$ sono ideali di $L_1 \oplus L_2$. Inoltre ogni ideale di L_i è ideale anche di L.

Poss. ora dimostrare il legame fra alg. di Lie semplici e semisemplici.

Teorema: Sia L alg. di Lie. L è semisemplice se e solo se è somma diretta di algebre di Lie semplici:

$$L = L_1 \oplus \_ \oplus L_t$$

(è ammesso il caso $t=0$, cioè $L=\{0\}$)

In tal caso $L_1, \_ , L_t$ sono gli ideali semplici di L, per cui la decomp. è unica a meno dell'ordine.

Dim: $\Leftarrow$] Se L è somma diretta come sopra, allora le proiez. $\pi_i : L \to L_i$ sono omom suriett. di algebre di Lie, e $\pi_i(\mathrm{Rad}(L))$ è un ideale risolubile di $\mathrm{Im}(\pi_i) = L_i$, quindi $\pi_i(\mathrm{Rad}(L)) = \{0\}$ $\forall i$, segue $\mathrm{Rad}(L) = \{0\}$.

$\Rightarrow$] Sia I ideale $\neq \{0\}$ minimale (se non ce ne sono allora $L = \{0\}$). Allora I non è risolubile, e consid. $I \cap I^\perp$ ($I^\perp$ risp. a K_L). Ora: $I^\perp$ è un ideale, infatti dati $x \in I^\perp$, $y \in L$, $z \in I$:

$$K_L([x,y],z) = K_L(x, \underbrace{[y,z]}_{\in I}) = 0, \quad \text{per cui } [x,y] \in I^\perp.$$

Vogliamo $I \cap I^\perp \overset{(?)}{=} \{0\}$, ma ricordiamo che non segue semplicem. dal fatto che K_L è non degenere! Però $I \cap I^\perp$ è un ideale di L, e per il lemma $K_{I\cap I^\perp} = K_L\big|_{(I\cap I^\perp)\times(I\cap I^\perp)}$, che è nulla. Per il criterio di Cartan $I \cap I^\perp$ è risolubile, quindi $I \cap I^\perp = \{0\}$.

Ora: dal fatto che κ_L è non degenere segue $\dim(I)+\dim(I^\perp)=$

$=\dim(L)$, e concludiamo $L = I \oplus I^\perp$ (somma diretta di alg. di Lie).

Oss. anche che allora ogni ideale di I è anche ideale di L.

Inoltre I non è risolubile $\Rightarrow$ non è abeliano $\Rightarrow$ è semplice!

Per induzione su $\dim(L)$: $I^\perp = L_2 \oplus \text{—} \oplus L_n$, e

allora $L = \underset{\overset{\|}{I}}{L_1} \oplus \text{—} \oplus L_n$.

Infine, sia I ideale semplice. Segue $[I,L] = \begin{cases} \{0\} \\ I \end{cases}$, ma

$\{0\}$ vorrebbe dire $I \subseteq Z(L) = \{0\}$, assurdo. Allora

$[I,L] = I$. Ma

$$[I,L] = [I, L_1 \oplus \text{—} \oplus L_n] = [I, L_1] \oplus \text{—} \oplus [I, L_n] .$$

Segue, $I = [I, L_i]$ per qualche i, cioè

$I \subseteq L_i$, quindi $I = L_i$. $\square$

Corollario: Se L è semisemplice allora $L = [L,L]$, ogni immagine omomorfa di L è semisemplice, e gli ideali di L sono le somme di alcuni degli L_i.

Dim.: $L^{(1)} = L_1^{(1)} \oplus \_ \oplus L_t^{(1)} = L_1 \oplus \_ \oplus L_t = L$

Sia poi $I \subseteq L$ ideale, e consid. $J = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \pi_i(I)$

Abb. $\pi_i(I) = L_i$ opp. $\{0\}$, e chiaram. $I \subseteq J$. Inoltre

$I \supseteq [I, L_i] = [\pi_i(I), L_i] = \pi_i(I)$, quindi $I \supseteq J$.

Segue anche che ogni imm. omomorfa è somma diretta di alcuni degli L_i. □

Oss.: Il nostro obiettivo a lungo termine è classificare le alg. di Lie semisemplici in termini di oggetti combinatorici chiamati sistemi di radici. Anticipiamo la costruzione di questi oggetti in un esempio.

$L = \mathfrak{sl}(3)$. Si considera $H = \mathfrak{h}(3)$, e oss. che

$$L = H \oplus ke_{12} \oplus ke_{23} \oplus ke_{13} \oplus ke_{21} \oplus ke_{32} \oplus ke_{31}$$

è decomp. di L in $ad(H)$-autospazi. Poi oss. che

$$[e_{12}, e_{21}] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = h_{12} \qquad [e_{23}, e_{32}] = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = h_{23}$$

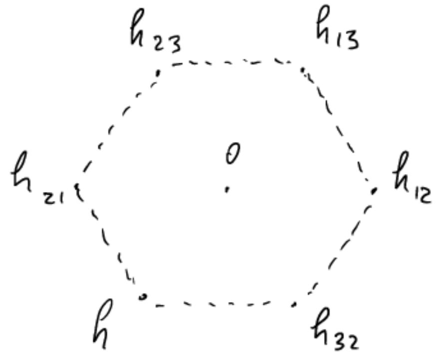
$$[e_{13}, e_{31}] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = h_{13},$$ e analogam.

$[e_{21}, e_{12}] = h_{21} = -h_{12}$, ecc...

Questi elem. generano a 3 a 3 delle sottoalgebre di Lie

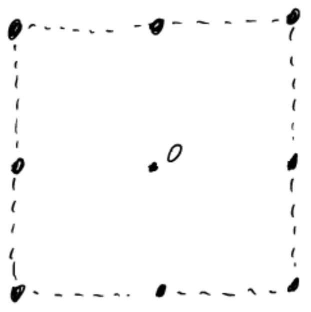
$\mathrm{span}\{e_{ij}, h_{ij}, e_{ji}\} \cong sl(2) \quad (\forall i \neq j)$.

Infine, calcoliamo $K_L(h_{ij}, h_{er})$, e facciamo finta che h_{ij} siano elem. di $\mathbb{R}^2$, e che $K_L(h_{ij}, h_{er})$ sia il prodotto scalare standard. Vengono 6 pti di $\mathbb{R}^2$ in una config. particolare:



Sono i vertici di un esagono regolare!

Stessa costruz. con $L = sp(4)$ e $H = \mathfrak{h}(4) \cap L$: vengono 8 punti su un quadrato, i vertici e i punti medi dei lati:



Vogliamo riprodurre la stessa costruzione con L semisemplice qualsiasi, e per farlo dobbiamo:

1) trovare un analogo di H per L qualsiasi

2) trovare le sottoalgebre $\cong sl(2)$ e usare le loro proprietà per dim. che la configurazione dei punti che otterremo in $\mathbb{R}^n$ ha proprietà interessanti.

Strategia:

1) negli esempi, H è fatto da elem. semisemplici, per L qualsiasi l'analogo saranno elem. ad-semisemplici, ma avremo bisogno di studiarli a fondo.

2) le proprietà seguiranno pensando a L come un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo, quindi dovremo studiare bene prima i moduli per algebre di Lie semisemplici ($\mathfrak{sl}(2)$ è semisemplice), poi molto bene proprio gli $\mathfrak{sl}(2)$-moduli.

Iniziamo preparandoci a studiare gli elem. ad-semisemplici.

Teorema: Se L è semisemplice allora $ad(L) = Der(L)$.

Per la dim. si usa:

Oss.: Dato $x \in L^{\swarrow\text{(qualsiasi)}}$ e $\delta \in Der(L)$, abb. $[\delta, ad(x)] = ad(\delta(x))$, che si verifica facilmente.

Dim. teorema: Sia L semisemplice, e osserviamo che $\overset{I\,\shortparallel}{ad(L)}$ è un ideale di $Der(L)$, grazie all'oss. precedente.

Vogliamo usare la forma di Killing su $Der(L)$ e studiare $I^{\perp}$.

Oss. che anche $ad(L)$ è semisemplice: non solo è imm. omomorfa, ma vale $Z(L)=\{0\}$ quindi $ad(L)\cong L$.

Perciò $K_I : I \times I \longrightarrow k$ è non degenere.

Ricordiamo anche $K_{Der(L)} = K_{Der(L)}\big|_{I\times I}$ per un lemma precedente.

Allora $I^\perp$ = ortogonale di I in $Der(L)$ risp. a $K_{Der(L)}$ soddisfa $I\cap I^\perp=\{0\}$, quindi $[I, I^\perp]=\{0\}$ (perchè è cont. in entrambi).

Sia ora $\delta\in I^\perp$, abb. $[\delta, ad(x)]=0$, da cui $ad(\delta(x))=0$, $\forall x\in L$, da cui $\delta=0$, cioè $I^\perp=\{0\}$. Ma da questo segue $Der(L)=I$, perchè $\dim(I)\geq \operatorname{codim}_{Der(L)}(I^\perp)$ (essere ch $I^\perp$ è descritto da un sistema di $\dim(I)$ equazioni).

□

<u>Def.</u>: Sia L alg. di Lie, e $x\in L$. Allora x si dica <u>ad-semisemplice</u> se $ad(x): L\longrightarrow L$ è semisemplice

<u>Corollario</u>: Se L è semisemplice, c'è una decomp. di J.-C. „astratta", cioè $\forall x\in L\ \exists!\ x_s, x_n\in L \mid x = x_s + x_n$, x_s ad-semisemplice, x_n ad-nilpotente, e $[x_s, x_n]=0$.

Dim.: Idea: dim. che $ad(x)_s, ad(x)_n \in ad(L)$, facendo vedere che $ad(x)_s \in Der(L)$ (e allora anche $ad(x)_n \in Der(L)$).

Decomp. $L = \bigoplus_{\alpha \in k} L_\alpha$ in autosp. gen. per $ad(x)$, poniamo $D = ad(x)_s$, $E = ad(x)$ sappiamo $D(v) = \alpha v \ \forall v \in L_\alpha$. Osserviamo prima di tutto che $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$, infatti dato $a \in L_\alpha$, $b \in L_\beta$, abb.

$$\left(E-(\alpha+\beta)\right)^m([a,b]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{verifica elem. per induzione su } m}}{=} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left[(E-\alpha)^i a, (E-\beta)^{m-i} b\right]$$

che è $=0$ se m è abb. grande

Allora $D([a,b]) = (\alpha+\beta)[a,b] = [\alpha a, b] + [a, \beta b] = [D(a), b] + [a, D(b)]$

e segue che D è una derivazione. Quindi $\exists\, x_s \mid ad(x_s) = ad(x)_s$, e $\exists\, x_n = x - x_s \mid ad(x_n) = ad(x)_n$. Tutte le propr. volute di x_s, x_n valgono, infatti $ad([x_s, x_n]) = [ad(x)_s, ad(x)_n] = 0$ e ad è iniettiva. □

Ora il nostro obiettivo è dim. che ogni rappr. di un'alg. di Lie semisemplice è completam. riducibile (Teo. di Weyl).

Altre consid. sulle rappr. di alg. di Lie

Def: Siano V, W spazi vettoriali. Uno sp. vett. P con un'appl. bil. $V \times W \xrightarrow{p} P$ è detto prod. tensoriale di V e W se $\forall\, q: V \times W \to Q$ bil. con Q sp. vett. $\exists!\, r: P \to Q$ lineare tale che

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "q"] \arrow[rd, "p"'] & Q \\ & P \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $q = r \circ p$.

Prop.: Un prodotto tensoriale esiste ed è unico a meno di isom.. Si denota $V \otimes W$, e $p(v,w)$ si denota con $v \otimes w$. Una base di $V \otimes W$ si ottiene con i vettori $v_i \otimes w_j$ dove i v_i formano una base di V e i w_j formano una base di W.

Dim.: Sia $P = \operatorname{Span}\{v_i \otimes w_j\}$ e definiamo $V \times W \longrightarrow P$, $(v_i, w_j) \longmapsto v_i \otimes w_j$, estesa per bilinearità, cioè

$$\left(\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j w_j\right) \longmapsto \sum_{i,j} a_i b_j \, v_i \otimes w_j$$

Data $q : V \times W \to Q$, basta porre $r(v_i \otimes w_j) = q(v_i, w_j)$. □

Oss.: 1) Se V e W hanno dim. finita allora

$\operatorname{Hom}(V,W) \cong W \otimes V^*$, tramite $w \otimes \eta \longmapsto (v \mapsto \eta(v) w)$.

2) Gli elem. di $V \otimes W$ sono comb. lin. di vettori del tipo $v \otimes w$ con $v \in V$, $w \in W$.

Esercizio: Un $\varphi \in \operatorname{Hom}(V,W)$ si scrive come $w \otimes \eta$ se e solo se ha rango 1.

Def.: Se V, W sono G-moduli (G = gruppo) $V \otimes W$ ha struttura naturale di G-modulo con $g.(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw)$. Se sono L-moduli (L = alg di Lie) allora si pone $x.(v \otimes w) = (xv) \otimes w + v \otimes (x.w)$.

Inoltre $\operatorname{Hom}(V,W)$ è un G-modulo ponendo $g.f)(v) = g \cdot f(g^{-1}v)$ e un L-modulo ponendo $(x.f)(v) = f(-xv) + x.f(v)$.

Esercizio: Verificare che questo rende $V \otimes W$ e $\operatorname{Hom}(V,W)$ effettivamente dei G-moduli, rispett. L-moduli, e che l'isom. dato $W \otimes V^* \longrightarrow \operatorname{Hom}(V,W)$ è isom. di G-moduli, rispett. L-moduli.

Lemma (Schur): Se V è un L-modulo irriducibile $\overset{\swarrow \text{ alg. di Lie}}{}$, $(\varphi: L \to \mathfrak{gl}(V))$

$$Z_{\mathfrak{gl}(V)}(\varphi(L)) = k \cdot Id_V$$

Dim.: $\supseteq$) ovvio.

$\subseteq$) Sia $y \in Z_{\mathfrak{gl}(V)}(\varphi(L))$, y ha un autosp. $W \subseteq V$ di autovalore α. $\neq \{0\}$

Allora W è L-stabile, perché $\forall x \in L, \forall v \in W$

$$y(x.v) = x.(yv) = x.(\lambda v) = \lambda\, x.v.$$

Segue $W = V$ e $y = \alpha \cdot Id_V$. $\square$

Elem. di Casimir di una rappr.

Sia $\varphi: L \to \mathfrak{gl}(V)$ rappr., supp. φ fedele (= iniettiva).

Def.: $$b_\varphi: L \times L \longrightarrow k$$
$$(x,y) \longmapsto tr(\varphi(x)\varphi(y))$$

Proprietà: 1) associatività: $b_\varphi([x,y],z) = b_\varphi(x,[y,z]) \quad \forall x,y,z \in L$

2) il nucleo $\{x \mid b_\varphi(x,y) = 0 \ \forall y \in L\}$ è un ideale di L.

3) se L è semisemplice b_φ è non degenere

(dim. come per κ_L).

Def.: Sia L semisemplice, φ rappr. fedele, sia $(x_1, \dots, x_n)$ base di L, $(y_1, \dots, y_n)$ base duale rispetto a b_φ, cioè $b_\varphi(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. L'elem. di Casimir di φ è

$$c_\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\varphi(y_i)$$

Oss.: Se $(x_1', \dots, x_n')$ è un'altra base di L, $(y_1', \dots, y_n')$ base duale, poniamo

$$x_i' = \sum_{l=1}^{n} a_{li}\, x_l \,, \qquad A = (a_{ij}) \text{ matr. del camb. di base.}$$

$$y_i' = \sum_{l=1}^{n} b_{li}\, y_i \,, \qquad B = (b_{ij}) \quad \text{——} \,, \text{————}$$

Allora $\delta_{ij} = b_\varphi(x_i', y_j') = \sum_{l,m} a_{li}\, b_{mj}\, b_\varphi(x_l, y_m) = \sum_l a_{li}\, b_{lj}$

da cui $B = {}^t A^{-1}$.

Segue $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i')\varphi(y_i') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l,m=1}^{n} a_{li}\, \varphi(x_l)\, b_{mi}\, \varphi(y_m) =$

$$= \sum_{l,m=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{li}\, b_{mi} \right)}_{= \delta_{lm}} \varphi(x_l)\, \varphi(y_m) = \sum_{l=1}^{n} \varphi(x_l)\varphi(y_l)$$

cioè c_φ non dip. dalla scelta della base di V.

Lemma: $c_\varphi \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$

Dim.: Usiamo $[A, BC] = [A,B] \cdot C + B \cdot [A,C]$ $\forall A, B, C \in gl(V)$ (cioè $ad(A)$ è una derivazione di $gl(V)$ anche come algebra associativa col prodotto usuale), dim.: esercizio.

Dato $x \in L$, scriviamo $[x, x_i] = \sum_j \alpha_{ij} x_j \quad [x, y_i] = \sum_j \beta_{ij} y_j$

Allora $$\alpha_{ij} = \sum_l \alpha_{il}\, b_\varphi(x_l, y_j) = b_\varphi\Big(\sum_l \alpha_{il} x_l, y_j\Big) =$$

$$= b_\varphi([x, x_i], y_j) = -b_\varphi([x_i, x], y_j) = -b_\varphi(x_i, [x, y_j]) =$$

$$= \underset{\uparrow \text{stessi passaggi}}{\ldots} = -\beta_{ji}$$

e calcoliamo

$$[\varphi(x), c_\varphi] = \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)\varphi(y_i)] = \sum_i \Big(\overset{\varphi([x,x_i])}{\overset{\shortparallel}{\overbrace{[\varphi(x), \varphi(x_i)]}}}\varphi(y_i) + \varphi(x_i)\cdot \overset{\varphi([x,y_i])}{\overset{\shortparallel}{\overbrace{[\varphi(x), \varphi(y_i)]}}}\Big)$$

$$= \sum_{i,j} \Big(\alpha_{ij}\, \varphi(x_j)\varphi(y_i) + \beta_{ij}\, \varphi(x_i)\varphi(y_j)\Big) =$$

$$= \sum_{i,j} \Big(\alpha_{ij}\, \varphi(x_j)\varphi(y_i)\Big) + \sum_{j,i} \underbrace{(-\alpha_{ij})}_{\overset{\shortparallel}{\beta_{ji}}} \varphi(x_j)\varphi(y_i) = 0$$

$\square$

Oss.: 1) $\operatorname{tr}(c_\varphi) = \sum_i^m \operatorname{tr}(\varphi(x_i)\varphi(y_i)) = \sum_i b_\varphi(x_i, y_i) = \dim(L)$

2) Supp. φ irriducibile, allora $c_\varphi \in k\cdot Id_V$ cioè $\exists \alpha \in k \,|$ $c_\varphi = \alpha\cdot Id_V$, e allora

$$\operatorname{tr}(c_\varphi) = \alpha\cdot\dim(V) \;(= \dim(L)) \quad \text{da cui} \quad \alpha = \frac{\dim(L)}{\dim(V)}.$$

Esempio: $L = \mathfrak{sl}(2)$ $\quad \varphi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(2)$ l'inclusione

base (e, h, f), base duale $(f, \frac{h}{2}, e)$

$$c_\varphi = ef + \frac{1}{2}h^2 + fe = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{\dim(L)}{\dim(V)} \cdot I_2$$

Teorema (Weyl): Sia L semisemplice, V L-modulo.

Allora V è completam. riducibile.

Dim.: Sia $W \subseteq V$ sottomodulo, $W \neq \{0\}$ e $\neq V$. Dim che W ha un supplementare L-stabile U, cioè tale che $V = W \oplus U$. Questo è equivalente ($\forall W$) alla completa riducibilità di V. Procediamo per induz. su $\dim(V)$. Inoltre possiamo assumere φ fedele, eventualm. rimpiazzando L con $\varphi(L)$ ($\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$). Inoltre poss. assumere $\varphi(L) \neq \{0\}$, altrim. ogni sottosp. vett. è un sottomodulo e in questo caso V è completam. riducibile.

1) Supp. $\operatorname{codim}(W) = 1$. Allora $\frac{V}{W}$ è un L-modulo di dim. 1, cioè $L \to \mathfrak{gl}(V/W) = \mathfrak{gl}(1)$, ma $L = [L, L]$ quindi l'immagine di L in $\mathfrak{gl}(1)$ è dentro $\mathfrak{sl}(1) = \{0\}$, cioè V/W è l'L-modulo nullo ($x.(v + W) = 0 + W \ \forall x \in L, v \in V$).

1a) Supp. inoltre W irriducibile. Allora $\boxed{c_\varphi}$ ci fornirà un supplementare!

Abbiamo: $c_\varphi : V \to V$ commuta con $\varphi(L)$; un altro modo di esprimere questa cosa è dire che c_φ è un omomorfismo di L-moduli, infatti

$$c_\varphi(x.v) = x.c_\varphi(v) \qquad \forall x \in L, \forall v \in V.$$

Segue che $\ker(c_\varphi)$ è un L-sottomodulo, e vogliamo $V \overset{(?)}{=} W \oplus \ker(c_\varphi)$.

Osserviamo che $c_\varphi(W) \subseteq W$ perché ogni $\varphi(x_i)$ e $\varphi(y_i)$ manda W in W, inoltre L agisce banalmente (cioè manda tutto in zero) su V/W, e allora anche c_φ. Infine, c_φ agisce come uno scalare α su W. Scegliamo una base di V che comincia con una base di W. La matrice di c_φ in questa base è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & 0 & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \alpha & * \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$\longleftrightarrow$ base di W

$\leftarrow$ scalare con cui agisce c_φ su V/W

Se $\alpha = 0$ allora $tr(c_\varphi) = 0$ ma $tr(c_\varphi) = \dim(L) \neq 0$ assurdo.

Quindi $\alpha \neq 0$, allora $W \cap \ker(c_\varphi) = \{0\}$, e $\dim(\ker(c_\varphi)) = 1$, quindi $\ker(c_\varphi)$ è un supplementare L-stabile di W. Il caso 1a) è concluso.

1b) Supponiamo W non irriducibile, sia W' L-sottomodulo con $\{0\} \neq W' \neq W$.

Consid. $\frac{V}{W'} \supseteq \frac{W}{W'}$: abb. $\dim\left(\frac{V}{W'}\right) < \dim(V)$, quindi

$$\frac{V}{W'} = \frac{W}{W'} \oplus Z \qquad \text{con } Z \text{ } L\text{-sottomodulo} \subsetneq \frac{V}{W'}$$

Essendo un sottosp. del quoziente, Z è della forma $\frac{\tilde{Z}}{W'}$, $\tilde{Z} \subsetneq V$.

E visto che L manda $\frac{\tilde{Z}}{W'}$ in $\frac{\tilde{Z}}{W'}$, e W' in W', allora manda

$\tilde{Z}$ in $\tilde{Z}$, cioè $\tilde{Z}$ è un L-modulo. Ric: $\frac{V}{W'} = \frac{W}{W'} \oplus \frac{\tilde{Z}}{W'}$.

Segue $V = W + \tilde{Z}$, ma W e $\tilde{Z}$ potrebbero avere intersez. $\supsetneq \{0\}$.

Allora osservo che per induzione $\tilde{Z}$ è completam. riducibile e contiene il sottomodulo $\tilde{Z} \cap W$, quindi esiste U sottomodulo con $\tilde{Z} = (\tilde{Z} \cap W) \oplus U$.

Ora $V = W + ((\tilde{Z} \cap W) \oplus U) = W \oplus U$.

2) Discutiamo il caso $\operatorname{codim}_V(W)$ qualsiasi, usando $\operatorname{Hom}(V,W) = \{f : V \to W \text{ lineare}\}$. Definiamo

$$\mathcal{V} = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare}, \quad f|_W \in k\, Id_W \}$$

Il sottosp. $\mathcal{V}$ di $\operatorname{Hom}(V,W)$ è un sottomodulo: dati $x \in L$, $f \in \mathcal{V}$, $w \in W$ abb. $(x.f)(w) = x.f(w) - f(x.w) = x.\alpha w - \alpha \cdot x.w = 0$. Cioè vale

$(f|_W = \alpha \cdot Id_W)$

ancora di più: se $f \in \mathcal{V}$ allora $x.f$ è zero su W.

Consid. $\mathcal{W} = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare}, \ f|_W = 0 \}$, segue $x.\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ $\forall x \in L$, in particolare $\mathcal{W}$ è un L-sottomodulo. Ha anche codim. 1, perché fissata $\bar{f} \in \mathcal{V}$ tale che $\bar{f}|_W = Id_W$, ogni $f \in \mathcal{V}$ si scrive come

$$f = \overbrace{\left(f - \underset{\substack{\uparrow \\ f|_W = \alpha \cdot Id_W}}{\alpha} \bar{f}\right)}^{\in \mathcal{W}} + \alpha \bar{f}.$$

Per 1), $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ supplementare L-stabile di dim. 1, sia $\mathcal{U} = k \cdot f_0$. Riscalando f_0 poss. supporre $f_0|_W = Id_W$.

Vale $x.f_0 = 0 \ \forall x \in L$, perché $x.\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ (visto prima), e $x.f_0 \in \mathcal{U}$ (perché $\mathcal{U}$ è sottomodulo), per cui $x.f_0 \in \mathcal{W} \cap \mathcal{U} = \{0\}$.

Cioè $\forall v \in V$: $0 = (x.f_0)(v) = x.f_0(v) - f_0(x.v)$, cioè $f_0 : V \to W$ è un omom. di L-moduli.

Segue: $X = \ker(f_0)$ è un sottomodulo di V, e inoltre

$$X \cap W = \{0\}$$

perché f su W è Id_W, quindi $\ker(f|_W) = \{0\}$. D'altronde $f_0(V) = W$ quindi $\dim(X) = \dim(V) - \dim(W)$ e allora $V = W \oplus X$. □

Confronto fra la decomp. di J.-C. in $gl(n)$ e quella „astratta" in $L \subseteq gl(n)$.

Teorema: Sia L semisemplice e $\varphi : L \to gl(V)$ rappres. Per ogni $x \in L$ vale

$$\varphi(x_s) = \varphi(x)_{s,std} \qquad \varphi(x_n) = \varphi(x)_{n,std}$$

↖ decomp. di J.C. standard

Per la dim.:

Lemma 1: Sia $T : V \to V$ endom. di uno sp. vett., e sia $W \subseteq V$ sottosp. vett. T-stabile. Scriviamo $T|_W : W \to W$. Allora

$$(T_{s,std})|_W = (T|_W)_{s,std}, \quad (T_{n,std})|_W = (T|_W)_{n,std}$$

Dim.: Sappiamo che $T_{s,std}(W) \subseteq W$ e analogam. per $T_{n,std}$.

Inoltre $T_{s,std}\big|_W$ è anch'esso semisemplice, e $T_{n,std}\big|_W$ è nilpotente.

Commutano, e la somma è $T\big|_W$, quindi il lemma segue dall'unicità della decomp. di J.-C. □

Lemma 2: Sia $\varphi : V \to W$ isomorfismo di sp. vett., e $T : V \to W$ endomorfismo. Allora ($\varphi \circ T \circ \varphi^{-1} : W \to W$)

$$(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})_{s,std} = \varphi \circ T_{s,std} \circ \varphi^{-1}$$

$$(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})_{n,std} = \varphi \circ T_{n,std} \circ \varphi^{-1}$$

Dim.: Simile al precedente; $\varphi \circ T_{s,std} \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ T_{n,std} \circ \varphi^{-1}$ hanno le stesse proprietà di $T_{s,std}$ e $T_{n,std}$ rispettivamente, quindi sono le parti semis. e nilpot. di $\varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$ per l'unicità □

Dim. del teorema:

V è completam. riducibile, $V = \overbrace{V_1 \oplus \dots \oplus V_t}^{\text{irriducibili}}$, e

$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ (L_i = alg. di Lie semplice $\forall i$)

Abb. $x = (x_1, \dots, x_r) \in L$ allora $x_s = ((x_1)_s, \dots, (x_r)_s)$

e dato $y \in gl(n)$ abb. $y = y_1 + \_ + y_t$, e $y_{s,std} = (y_1)_{s,std} + \_ + (y_t)_{s,std}$

Quindi possiamo consid. L_i e V_j separatam., cioè assumiamo L semplice e V irriducibile, e V non banale, cioè $\varphi(L) \neq \{0\}$. Segue anche $\ker(\varphi) = \{0\}$, cioè $\varphi : L \to \varphi(L)$ invertibile.

Consideriamo:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "ad(x)"] & \varphi(L) \arrow[r, hook] \arrow[d, "ad(\varphi(x))|_{\varphi(L)}"] & gl(V) \arrow[d, "ad(\varphi(x))"] \\
L \arrow[r, "\varphi"] & \varphi(L) \arrow[r, hook] & gl(V)
\end{tikzcd}$$

$$ad(\varphi(x))\Big|_{\varphi(L)} : \varphi(L) \longrightarrow \varphi(L)$$

$$\underset{\text{con } z \in L}{u = \varphi(z)} \longmapsto [\varphi(x), u] = [\varphi(x), \varphi(z)] = \varphi(\underset{\varphi^{-1}(u)}{\underset{\shortparallel}{[x,z]}})$$

Cioè $ad(\varphi(x))\Big|_{\varphi(L)} = \varphi \circ ad(x) \circ \varphi^{-1}$ e vale

$$\left(ad(\varphi(x))\big|_{\varphi(L)} \right)_{s,std} = \left(\varphi \circ ad(x) \circ \varphi^{-1} \right)_{s,std} \overset{\text{Lemma 2}}{=} \varphi \circ ad(x)_{s,std} \circ \varphi^{-1}$$

Inoltre $$\left(ad(\varphi(x))\Big|_{\varphi(L)} \right)_{s,std} \underset{\text{Lemma 1}}{=} \left(ad(\varphi(x))_{s,std} \right)\Big|_{\varphi(L)}$$

e $ad(x)_{s,std} = ad(x_s)$ per la def. di x_s.

Concludiamo: $\varphi \circ \mathrm{ad}(x_s) \circ \varphi^{-1} = \mathrm{ad}(\varphi(x)_{s,std})\Big|_{\varphi(L)}$

Concretamente: $\forall\ u \in \varphi(L)$ abb.

$$[\varphi(x)_{s,std}, u] = \varphi([x_s, \varphi^{-1}(u)]) = [\varphi(x_s), u]$$

Basta a concludere $\varphi(x)_{s,std} = \varphi(x_s)$?

Usiamo il lemma di Schur:

$[\varphi(x)_{s,std} - \varphi(x_s), u] = 0$ cioè $y = \varphi(x)_{s,std} - \varphi(x_s) \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$

Allora y è uno scalare, calcoliamo la traccia. Abb. $\varphi(x_s) \in \varphi(L) = \varphi([L,L]) = [\varphi(L), \varphi(L)]$

quindi $tr(\varphi(x_s)) = 0$. D'altronde $\varphi(x)_{s,std}$ ha stessa traccia di $\varphi(x)$, che ha traccia nulla per lo stesso rag.. Allora y ha traccia nulla: segue $y = 0$, quindi $\varphi(x_s) = \varphi(x)_{s,std}$. Stesso rag. per $\varphi(x_n) = \varphi(x)_{n,std}$. □

Corollario: $\varphi(L)$ contiene $\varphi(x)_{s,std}$ e $\varphi(x)_{n,std}$ $\forall x \in L$.

Oss.: Il teorema vale anche per $L \subseteq gl(n)$ e $\varphi: L \hookrightarrow gl(n)$ l'inclusione, e dice che la decomp. astratta in L semisemplice è quella standard.

$sl(2)$ - moduli

Sia V un $sl(2)$-modulo. Per l'ultima osservazione abbiamo $h_s = h$, da cui anche $\varphi(h) \in gl(V)$ è semisemplice.

Cioè V si decompone in autospazi per h:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in k} V_\alpha \qquad \left(V_\alpha = \{ v \in V \mid h.v = \alpha v \} \right)$$

Def.: Gli α tali che $V_\alpha \neq \{0\}$ si chiamano pesi di h su V, e i vettori in $V_\alpha \setminus \{0\}$ si dicono (auto-)vettori di peso α.

Lemma: $e.V_\alpha \subseteq V_{\alpha+2}$, $\qquad f.V_\alpha = V_{\alpha-2}$

Dim.: Sia $v \in V_\alpha$, allora
$$h.e.v = [h,e].v + e.h.v = $$
$$= 2e.v + e.\alpha v = (\alpha+2)e.v$$

$$h.f.v = [h,f].v + f.h.v = -2f.v + f.\alpha v = (\alpha-2)f.v.$$

$\square$

Es.: Ricordiamo l'azione di $sl(2)$ su $k[x,y]_d$: gli autovalori di h erano $d, d-2, d-4, \dots, -d+2, -d$, e in effetti e ed f si comportavano come nel lemma.

Def.: Sia $a \in k$ tale che $V_\alpha \neq \{0\}$ ma $V_{\alpha+2} = \{0\}$. Allora i vettori di $V_\alpha \setminus \{0\}$ si dicono massimali, e vale $e.V_\alpha = \{0\}$.

Chiaramente $\dim(V)$ è finita quindi esistono vettori massimali.

Es.: Ric. la rappr. di $sl(2)$ su $k[x,y]_d$ vista negli esercizi: e agisce come $x\frac{\partial}{\partial y}$, f come $y\frac{\partial}{\partial x}$, h come $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$:

$$e.x^{d-i}y^i = i.x^{d-i+1}y^{i-1}, \quad f.x^{d-i}y^i = (d-i)x^{d-i-1}y^{i+1}$$

$$h.x^{d-i}y^i = (d-i-i)x^{d-i}y^i = (d-2i)x^{d-i}y^i$$

Lemma: Sia V un $sl(2)$-modulo, v_0 vettore massimale di peso λ
$\nwarrow$ analogo di x^d

Poniamo $v_{-1}=0$, e $v_i = \underbrace{f^i}.v_0$

$\nwarrow = \underbrace{f.(f.\dots f.(f.v))\dots)}_{i \text{ volte } f}$

Allora
$$h.v_i = (\lambda-2i)\, v_i$$
$$f.v_i = v_{i+1}$$
$$e.v_i = i(\lambda-i+1)\, v_{i-1}$$

(Nell'esempio avremmo $\lambda=d$,

$v_1 = d x^{d-1} y$, $v_2 = d(d-1)x^{d-2}y^2$

$\dots$ $v_i = \dfrac{d!}{(d-i)!} x^{d-i} y^i$.)

Dim.: h: dal lemma prec.

f: è la def. di v_{i+1}

$$e.v_i = e.f.v_{i-1} = \overbrace{[e,f]}^{h}.v_{i-1} + f.e.v_{i-1} \overset{\text{per induz. su } i}{=}$$

$$= \big(\lambda-2(i-1)\big)v_{i-1} + f.(\lambda-i+2)(i-1)\,v_{i-2} =$$

$$= \big(\lambda-2(i-1)\big)v_{i-1} + (\lambda-i+2)(i-1)v_{i-1} =$$

$$= \big(\underbrace{\cancel{\lambda} - \cancel{2i} + \cancel{2} + i\lambda - \cancel{\lambda} - i^2 + i + \cancel{2i}}_{\overset{\shortparallel}{i\lambda + i - i^2}} - \cancel{2}\big)v_{i-1} = i(\lambda-i+1)v_{i-1}.$$

□

Corollario: $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Dim.: f agisce in modo nilpotente quindi $\exists m \geq 0 \mid f^m.v_0 \neq 0$ e $f^{m+1}.v_0 = 0$

Allora $e.v_{m+1} = 0 = \overbrace{(m+1)}^{\neq 0}\big(\lambda-(m+1)+1\big)\underbrace{v_m}_{\neq 0}$ allora $\lambda - m = 0$, cioè $\lambda = m$.

□

Teorema: Sia V un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo irriducibile, sia v_0 vettore massimale di peso λ. Allora $\lambda \in \mathbb{Z}$, e abbiamo:

1) V è lo span di $v_0, v_1, \ldots$, ed è la somma diretta di spazi peso

$$V = \bigoplus_{i=0}^{\lambda} V_{\lambda-2i} = V_\lambda \oplus V_{\lambda-2} \oplus \ldots \oplus V_{-\lambda+2} \oplus V_{-\lambda} \quad \left(\text{ciascuno} \neq \{0\}\right)$$

2) V ha un unico vett. massimale a meno di multipli scalari, e il suo peso λ è *il peso più alto*.

3) L'azione di $\mathfrak{sl}(2)$ è data dalle formule del lemma, quindi V è *univocam.* *determinato* da λ a meno di isomorfismi. Denotiamo $V = V(\lambda)$.

Dim.: ovvia ponendo $V_i = k v_i$. Il fatto che $V_{-\lambda} \neq \{0\}$ e $V_{-\lambda-2} = \{0\}$ segue dalla dim. del corollario, perché $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$, e $\lambda = m$. $\square$

Corollario: Se V è un $\mathfrak{sl}(2)$ modulo allora gli h-pesi sono tutti interi, e per ogni peso α abb. $\dim(V_\alpha) = \dim(V_{-\alpha})$. Inoltre decomponendo V in somma di irriducibili, il *numero* degli addendi è

$$\dim(V_0) + \dim(V_1).$$

Dim.: $V = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t)$

e oss. che $V_\alpha = V(\lambda_1)_\alpha \oplus \_\_ \oplus V(\lambda_t)_\alpha$, inoltre $V(\lambda_i)_\alpha$ ha dim. 0 opp. 1, e in ogni caso $\dim(V(\lambda_i)_\alpha) = \dim(V(\lambda_i)_{-\alpha})$.

Infine se λ_i è dispari allora $V(\lambda_i)_1$ ha dim. 1 e $V(\lambda_i)_0 = \{0\}$, invece se λ_i è pari allora $V(\lambda_i)_0$ ha dim. 1 e $V(\lambda_i)_1 = \{0\}$.

$\square$

Esempio: Supp. V somma diretta di moduli irriduc. U, W, X, Y, Z. Ciascun addendo si decompone come nel teorema, in h-autospazi. Mettiamo:

$$U = U_2 \oplus U_0 \oplus U_{-2}, \quad W = W_3 \oplus W_1 \oplus W_{-1} \oplus W_{-3}$$

$$X = X_0, \quad Y = Y_1 \oplus Y_{-1}, \quad Z = Z_2 \oplus Z_0 \oplus Z_{-2}$$

(U ha peso più alto 2, $W \rightsquigarrow 3$, $X \rightsquigarrow 0$, $Y \rightsquigarrow 1$, $Z \rightsquigarrow 2$).

Allora V si decompone in somma diretta così: $V = (U_2 \oplus \dots) \oplus (W_3 \oplus \dots) \dots$

cioè:

(peso 3)	(peso 2)	(peso 1)	(peso 0)	(peso -1)	(peso -2)	(peso -3)
	U_2		U_0		U_{-2}	
W_3		W_1		W_{-1}		W_3
			X_0			
		Y_1		Y_{-1}		
	Z_2		Z_0		Z_{-2}	

Ciascuno di questi ha dim. 1, e sommando quelli con lo stesso peso otteniamo un autosp. di V, es. $V_0 = U_0 \oplus X_0 \oplus Z_0$.

Sottoalgebre torali

Def.: Sia L alg. di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalgebra.
H si dice *torale* se $x = x_s$ $\forall x \in H$.

Es.: $L \subseteq gl(n)$, allora $H = L \cap h(n)$ è torale.

Lemma: Se H è torale allora è abeliana.

Dim.: Sia $x \in H$, allora $ad(x) : L \to L$ è diagonalizzabile. Allora anche

$ad(x)|_H : H \to H$ è diagonalizzabile, perché $ad(x)(H) \subseteq H$ cioè H è stabile per $ad(x)$.

Sia $(y_1, \dots, y_m)$ base di H di autovettori per $ad(x)$:

$$ad(x)(y_i) = \alpha_i y_i \quad , \quad ad(y_i)(-x) = \alpha_i y_i$$

cioè $\alpha_i y_i \in Im(ad(y_i))$. Inoltre $\alpha_i y_i \in ker(ad(y_i))$.
Ma il nucleo e l'immagine di un endom. diagonalizzabile hanno intersez. nulla (si veda anche il lemma prima della decomp. di Fitting). Allora

$$Im(ad(y_i)) \cap Ker(ad(y_i)) = \{0\}, \quad \text{cioè } \alpha_i = 0 \ \forall i. \qquad \square$$

Radici

Sia L alg. di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalgebra torale massimale. Allora tutti gli $ad(x)$ con $x \in H$ commutano, quindi si diagonalizzano simultaneamente.

Es.: $\mathfrak{sl}(n) = \underbrace{\mathfrak{h}(n)}_{\mathfrak{h}(n)\text{ - autosp. di autoval. } 0\ \forall x \in \mathfrak{h}(n)} \oplus \bigoplus_{i \neq j} k\, e_{ij}$

ciascuno è autovett. per $ad(x)$, con $x = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, di autovalore $\boxed{a_i - a_j}$

Ogni autovalore varia con $x \in H$, è quindi una funzione $H \to k$.

Lemma: Sia $y \in L$ autovettore di $ad(x)$ $\forall x \in H$, cioè $ad(x)(y) = \alpha(x) y$ $\forall x \in H$.
Allora $\alpha : H \to k$ è lineare.

Dim.: $\alpha(x) y = [x, y]$ che è lineare in x. $\square$

Dal Lemma segue:

$$L = \bigoplus_{\substack{\alpha \in H^* \\ \alpha \neq 0}} L_\alpha \oplus \underset{\substack{\parallel \\ Z_L(H)}}{L_0}$$

dove $L_\alpha = \{ y \in L \mid ad(x)(y) = \alpha(x) y \quad \forall x \in H \}$

Def.: Se $\alpha \in H^* \setminus \{0\}$ con $L_\alpha \neq \{0\}$ allora α si dice radice di L rispetto alla sottoalgebra H.

Proposizione: 1) Il numero delle radici di L è finito.
Inoltre $\forall \alpha, \beta \in H^*$ valgono:

2) $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$

3) se $\alpha \neq 0$ e $x \in L_\alpha$ allora x è ad-nilpotente

4) se $\alpha + \beta \neq 0$ allora $L_\alpha \perp L_\beta$ (risp. a K_L).

Dim.: 1) è ovvio.

2) sia $h \in H$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$:

$$ad(h)([x,y]) = [ad(h)(x), y] + [x, ad(h)(y)] =$$

$$= \alpha[x,y] + \beta[x,y] = (\alpha+\beta)[x,y]$$

3) Segue da 2): data $\beta \in H^*$, $ad(x)^m(L_\beta) \subseteq L_{\beta+m\alpha}$ che è zero per $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ abb. grande (per 1)).

4) Prendo $h \in H$ tale che $\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$, allora

$$\alpha(h)K(x,y) = K([h,x],y) = -K([x,h],y) = -K(x,[h,y]) = -\beta(h)K(x,y)$$

cioè $(\alpha(h) + \beta(h))K(x,y) = 0$, da cui la tesi. □

Obiettivo: dimostrare che $H = L_0$.

Corollario: $K\big|_{L_0 \times L_0}$ è non degenere.

Dim.: Sia $x \in \ker(K|_{L_0 \times L_0})$ cioè $K(x, L_0) = 0$, ma dalla proposiz.

Sappiamo $K(x, L_\alpha) = 0$ $\forall \alpha \neq 0$, cioè $K(x, L) = 0$, quindi $x = 0$.

$\square$

Prop.: $K|_{H \times H}$ è non degenere.

Dim.: Sia $x \in H \cap H^\perp$, dim. che $x \in L_0^\perp$, quindi sia $y \in L_0$, $y = y_s + y_n$ e oss. che $ad(y)(H) = \{0\}$, cioè i vettori di H sono tutti autovettori per $ad(y)$. Allora anche per $ad(y_s)$ = parte semis. di $ad(y)$, quindi $ad(y_s)(H) = \{0\}$ cioè $y_s \in L_0$. Allora $H + ky_s$ è una sottoalgebra torale, quindi $y_s \in H$. Ora

$$K(x,y) = K(x, y_s + y_n) = \underbrace{K(\overset{H^\perp}{\overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{x}}, \overset{H}{\overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{y_s}})}_{\overset{\parallel}{0}} + K(x, x_n) = tr\left(ad(x)\, ad(y_n)\right) = \dots$$

D'altronde x e y commutano ($y \in L_0$) quindi anche $ad(x)$ e $ad(y)$, quindi anche $ad(x)$ e $ad(y)_n = ad(y_n)$, e allora $ad(x)\,ad(y_n)$ è nilpotente. Perciò $\dots = 0$, cioè $x \in L_0^\perp$. Allora $x \in L_0 \cap L_0^\perp = \{0\}$, quindi $x = 0$.

Segue: $K|_{H \times H}$ è non degenere.

Corollario: $H = L_0$

Dim.: Ric. $L_0 = Z_L(H)$. Naturalmente $H \subseteq L_0 = (H^\perp \cap L_0) \oplus H$ perché K è nondeg. su H e su L_0. Inoltre $H^\perp \cap L_0$ e H sono ideali di L_0 (verifica immediata).

Poi ogni elem. di $H^\perp \cap L_0$ è ad-nilpotente, perché dato $y \in H^\perp \cap L_0$ come prima si ottiene $y_s \in H$ e $[H, y_n] = 0$ (perché $[H, y] = 0$) e $y_n \in H^\perp$, allora $0 = \kappa(x, y) = \kappa(x, y_s)$ $\forall x \in H$, da cui $y_s = 0$.

Infine, dato $y \in H^\perp \cap L_0$ e $z \in L_0$ abb.

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(z)\right) = \underbrace{\mathrm{tr}\left(\underset{\substack{\uparrow \\ H^\perp}}{\mathrm{ad}(y)}\,\underset{\substack{\uparrow \\ H}}{\mathrm{ad}(z_1)}\right)}_{\substack{\| \\ 0}} + \mathrm{tr}\left(\underset{\substack{\uparrow \\ H^\perp \cap L_0}}{\mathrm{ad}(y)}\,\underset{\substack{\uparrow \\ H^\perp \cap L_0}}{\mathrm{ad}(z_2)}\right) = \dots$$

Ora $H^\perp \cap L_0$ è fatto di elem. ad-nilpotenti, quindi la sua immagine in $\mathrm{ad}(L)$ è in $\mathfrak{b}^u(n)$ per qualche base di L. Segue $\dots = 0$. Ma allora $y \in L_0$ è ortogonale a tutto L_0, da cui $y = 0$. Cioè $L_0 = H$. $\square$

Esempio: $\mathfrak{sp}(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\underbrace{\tilde{A}}_{\substack{\uparrow \\ \text{trasposta rispetto} \\ \text{alla diag. secondaria}}} \end{pmatrix} \;\middle|\; B, C \text{ simmetriche risp. alla diag. secondaria } \boxed{\diagup} \right\}$

$$L = \mathfrak{sp}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & a & x & y \\ b & t_2 & z & x \\ u & s & -t_2 & -a \\ t & u & -b & -t_1 \end{pmatrix} \right\}$$

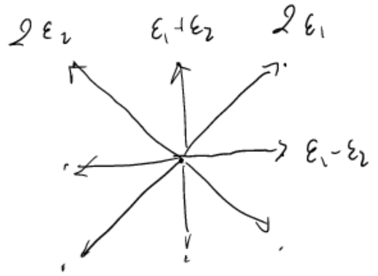
$H = \mathfrak{sp}(4) \cap \mathfrak{h}(4)$

radici $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (autosp. a)

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (x)

$2\varepsilon_1$ (y)

$2\varepsilon_2$ (z)



(Lunghezze e angoli: indotti dalla forma di Killing.)

Usiamo $\kappa_L = \kappa$ per identificare H e H^*, e poniamo su H^* la forma bil. indotta da κ_L :

$$t : H^* \xrightarrow{\cong} H$$

$$\alpha \longmapsto t_\alpha := \text{l'elem. di } H \text{ t.c. } \alpha(-) = \kappa(t_\alpha, -)$$

$$\kappa(t,-) \longleftarrow\!\shortmid\, t$$

La forma bil. su H^* si denota sempre con κ, ed def. da

$$\underset{\text{su } H^*}{K(\alpha,\beta)} = \underset{\text{su } H}{K(t_\alpha, t_\beta)} \quad \forall \alpha,\beta \in H^*$$

Esempio In $sl(n)$ le radici risp. a $H = \overbrace{}^{sl(n)\cap \mathfrak{h}(n) \text{ sono}}$ $\boxed{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ $\left(\varepsilon_i\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix} = a_i\right)$

l'autosp. corrispondente è ke_{ij} $(i \neq j)$

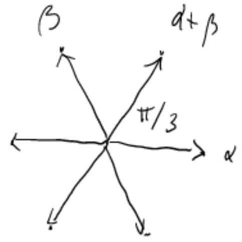
Calcoliamo $\kappa(\alpha,\alpha)$ con $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Abb.: t_α è tale che

$\kappa(t_\alpha, -) = \alpha(-)$, da questo $t_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n} & & & & \\ & \frac{-1}{2n} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $\kappa(\alpha,\alpha) = \dfrac{1}{2n^2}$

e $\kappa(\alpha, \overset{\beta}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}}) = \dfrac{-1}{4n^2}$

cioè ke_{12} è l'autosp. di radice α

Es. in $sl(3)$: $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\alpha} & \alpha+\beta \\ -\alpha & 0 & \beta \\ -\alpha-\beta & -\beta & 0 \end{pmatrix}$



$$\kappa(\alpha,\beta) = \frac{-1}{4\cdot 9} \qquad \kappa(\alpha,\alpha) = \kappa(\beta,\beta) = \frac{2}{4\cdot 9}$$

Sia $\Phi = \{\text{radici di } L \text{ risp. a } H\}$.

Proposizione. 1) Φ genera H^*

$\forall \alpha \in \Phi$:

2) $-\alpha \in \Phi$

più precisamente:

3) $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = k t_\alpha$, $\checkmark$ $\forall x \in L_\alpha, \forall y \in L_{-\alpha}: [x,y] = \kappa(x,y) t_\alpha$

4) $\alpha(t_\alpha) \; (= \kappa(\alpha,\alpha)) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Phi$

5) $\forall e_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\} \quad \exists f_\alpha \in L_{-\alpha}$ tale che

$$e_\alpha \mapsto e$$
$$h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] \mapsto h$$
$$f_\alpha \mapsto f$$

è un isom. di alg. di Lie $(S_\alpha :=) \operatorname{span}\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\} \longrightarrow sl(2)$

6) Per e_α come sopra: $h_\alpha = \dfrac{2 t_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)}$, $h_\alpha = -h_{-\alpha}$, $\alpha(h_\alpha) = 2$.

Dim.: 1) Sia $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ base di $\operatorname{Span} \Phi$ $(\subseteq H^*)$. Consid.

$\ker \subseteq H$

l'intersez $\operatorname{Ker}(\alpha_1) \cap \dots \cap \operatorname{Ker}(\alpha_m) =$

$= \{$ soluz. di un sistema omogeneo di m equaz. lin. indip. in n incognite, dove $n = \dim(H) \}$ ha dim. $n-m$.

Dato $h \in \ker(\alpha_1) \cap \dots \cap \ker(\alpha_m)$ abb. $h \in \ker(\alpha)$ $\forall \alpha \in \Phi$, e allora

$[h, H] = 0$ e $[h, L_\alpha] = 0$ $\forall \alpha \in \Phi$, quindi $h \in Z(L)$,

da cui segue $h = 0$, perciò $n - m = 0$.

2) Sia $\alpha \in \Phi$, sappiamo $L_\alpha \perp L_{\neq -\alpha}$. Se $L_{-\alpha} = \{0\}$ allora $L_\alpha \perp L$: assurdo.

3) Sia $h \in H$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$

$$\kappa(h, [x,y]) = \kappa([h,x], y) = \alpha(h)\,\kappa(x,y) = \kappa(t_\alpha, h)\,\kappa(x,y) =$$

$$\kappa\Big(h, \kappa(x,y)t_\alpha\Big)$$

e allora $[x,y] = \kappa(x,y)\,t_\alpha$.

4) Supp. $\alpha(t_\alpha) = 0$, cioè $ad(t_\alpha)(L_\alpha) = \{0\}$. Anche $-\alpha(t_\alpha) = 0$, da cui $ad(t_\alpha)(L_{-\alpha}) = \{0\}$. Consid. allora $e_\alpha \in L_\alpha$, $f \in L_{-\alpha}$ tali che $\kappa(e_\alpha, f) = 1$ (da cui $[e_\alpha, f] = t_\alpha$) e consid. la sottoalg. di Lie $R = Span\{e_\alpha, f, t_\alpha\}$.

Va isomorficamente in $ad(L)$, ed è risolubile (persino nilpotente) perché $[R,R] = k\,t_\alpha$ (infatti $[e_\alpha, t_\alpha] = \alpha(t_\alpha)e_\alpha = 0$ e lo stesso co f), e $[R,[R,R]] = 0$.

Quindi c'è una base di L in cui $ad(e_\alpha)$, $ad(f)$, $ad(t_\alpha) \in \mathfrak{b}$ e $ad(t_\alpha) \in \mathfrak{b}^u(\dim(L))$

assurdo.

5) Dato $e_\alpha \in L_\alpha$ scegliamo $f_\alpha \in L_\alpha$ tale che $\kappa(e_\alpha, f_\alpha) = \dfrac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}$ e poniamo $h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)}$, allora $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$, e $[h_\alpha, e_\alpha] =$

$$\frac{2[t_\alpha, e_\alpha]}{\kappa(\alpha,\alpha)} = \frac{2\,\cancel{\alpha(t_\alpha)}}{\cancel{\alpha(t_\alpha)}}\,e_\alpha = 2e_\alpha$$

Analogamente: $[h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$.

6) Formula per h_α data in 5). $t_\alpha = -t_{-\alpha}$ e $\kappa(-\alpha,-\alpha) = \kappa(\alpha,\alpha)$

quindi $h_\alpha = -h_{-\alpha}$, e $\alpha(h_\alpha) = \dfrac{2\alpha(t_\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = \dfrac{2\alpha(t_\alpha)}{\alpha(t_\alpha)} = 2$.

Prop.: 1) Data $\alpha \in \Phi$, abb. $\dim(L_\alpha) = 1$,

$$S_\alpha = L_\alpha \oplus L_{-\alpha} \oplus k h_\alpha$$

e dati e_α, h_α, allora f_α è unico.

2) Se $\alpha \in \Phi$, $c\alpha \in \Phi$ con $c \in k$ allora $c \in \{1, -1\}$.

3) Date $\alpha, \beta \in \Phi$ vale $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$

4) Date $\alpha, \beta \in \Phi$ con $\alpha + \beta \neq 0$ abb. $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$

5) Date $\alpha, \beta \in \Phi$ con $\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha \neq \beta$, siano r, q massimi interi tali che $\beta + q\alpha$, $\beta - r\alpha \in \Phi$. Allora $r, q \geq 0$ e

$$\beta + q\alpha,\ \beta + (q-1)\alpha, \dots, \beta+\alpha, \beta, \beta - \alpha, \dots, \beta - (r-1)\alpha, \beta - r\alpha \in \Phi$$

e $r - q = \beta(h_\alpha)$.

6) L è generata dagli L_α, cioè se $\tilde{L} \subseteq L$ è una sottoalg. di Lie cont. L_α $\forall \alpha \in \Phi$ allora $L = \tilde{L}$.

Dim.: Fissiamo $\alpha \in \Phi$ e $S_\alpha = \text{span}\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\}$ come nella prop. prec.
Consid. L come $S_\alpha = \mathfrak{sl}(2)$-modulo sotto l'azione aggiunta, e

$$M = H \oplus \bigoplus_{c \in k \setminus \{0\}} L_{c\alpha}$$

è un S_α-sottomodulo. I pesi di h_α sono interi, e sono $= 0$ su H, opp. $c\alpha(h_\alpha) = 2c$, da cui $2c \in \mathbb{Z}$.

Vediamo meglio la struttura di H: $\quad H = \ker(\alpha) \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{su cui } \alpha \text{ fa } 2}}{k \cdot h_\alpha}$

D'altronde $\ker(\alpha)$ è un S_α-sottomodulo, perché $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$ e $[h, f_\alpha] = -\alpha(h) f_\alpha$ $\forall h \in H$.

Anche S_α è un sottomodulo (S_α è una sottoalgebra!) quindi

$$M \supseteq \ker(\alpha) \oplus S_\alpha \supseteq H$$

Prendiamo un supplementare S_α-stabile: $M = (\ker(\alpha) \oplus S_\alpha) \oplus M'$.

I pesi di h_α su M' sono tutti dispari, perché ogni autovettore di h_α-peso zero è in $\ker(\alpha)$.

Ma allora i soli pesi pari di M sono $\overset{\text{peso di } e_\alpha}{2}, 0, \overset{\text{peso di } f_\alpha}{-2}$.

In particolare, $2\alpha \notin \Phi$, altrim. $e_{2\alpha}$ avrebbe h_α-peso 4.

Quindi nessuna radice è il doppio di una radice, da cui se $L_{c\alpha} \neq \{0\}$ allora $c \neq \frac{1}{2}$.

Segue: il peso 1 di h_α non compare in M, per cui non compare alcun peso dispari, perciò $M = \ker(\alpha) \oplus S_\alpha$ e vale 2).

Inoltre allora $L_\alpha \subseteq S_\alpha$, cioè $\dim(L_\alpha) = 1$, e vale 1).

Per gli altri, vediamo come agisce S_α sugli L_β con $\beta \notin \{\pm\alpha, 0\}$.

Abb.

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_{\beta + i\alpha}$$

Qui gli h_α-pesi sono $\{\beta(h_\alpha) + 2i \mid i \in \mathbb{Z}, \beta + i\alpha \in \Phi\}$

I pesi 0 e 1 non appaiono mai contemporaneamente, e $\forall i$ il peso $2i + \beta(h_\alpha)$ compare solo in L_β che ha dim. 1. Quindi N è irriducibile per S_α, e allora i suoi pesi sono una stringa dal più alto al suo opposto:

$\{m, m-2, \dots, -m+2, -m\} = \{\beta(h_\alpha)+2i \mid \beta+i\alpha \in \Phi\}$ cioè $\exists\, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tali che $\beta+q\alpha, \beta+(q-1)\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta-(r-1)\alpha, \beta-r\alpha \in \Phi$. Inoltre

$\beta(h_\alpha)+2q = -(\beta(h_\alpha)-2r)$ cioè $\beta(h_\alpha) = r-q \in \mathbb{Z}$, e

$\beta-\beta(h_\alpha)\alpha = \beta-(r-q)\alpha = \beta+(q-r)\alpha$ e visto che $-r \leq -r+q \leq q$

abb. $\beta-\beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. Cioè valgono 3) e 5).

Inoltre $$[e_\alpha, L_{\beta+i\alpha}] = \begin{cases} L_{\beta+(i+1)\alpha} & \text{se } \beta+(i+1)\alpha \in \Phi \\ \{0\} & \text{altrimenti, e in questo caso } L_{\beta+(i+1)\alpha} = \{0\} \end{cases}$$

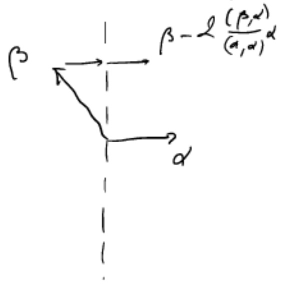
da cui $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$, cioè 4).

Infine, 6) segue dal fatto che $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$ e H è gen. dagli h_α (perché H^* è gen. da Φ).

□

Oss.: $\beta(h_\alpha) = \dfrac{2\beta(t_\alpha)}{K(\alpha,\alpha)} = \dfrac{2K(\beta,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}$

Il vettore $\beta - \dfrac{2K(\beta,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}\alpha$ è il riflesso di β rispetto all'iperpiano ortogonale ad α



Sia ora $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ base di H^* fatta di radici.

Lemma: $\Phi \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Dim.: Per trovare i coeff. di $\alpha \in \Phi$ rispetto ad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + \dots + c_m \alpha_m$$

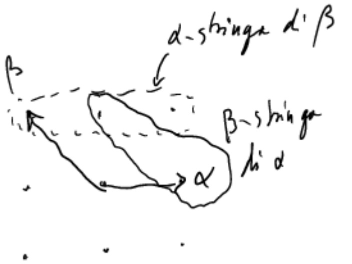
facciamo $\dfrac{2K(-, \alpha_j)}{K(\alpha_j, \alpha_j)}$:

$$\frac{2K(\alpha, \alpha_j)}{K(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{2K(\alpha_i, \alpha_j)}{K(\alpha_j, \alpha_j)}$$

E' un sistema di m eq. in m incognite a coeff. in $\mathbb{Z}$, e la matrice $\left(K(\alpha_i, \alpha_j)\right)$ è invertibile, quindi anche $\left(\dfrac{2K(\alpha_i, \alpha_j)}{K(\alpha_j, \alpha_j)}\right)$ perché è ottenuta riscalando le righe.

Quindi $c_i \in \mathbb{Q}$ $\forall i$. $\square$

Esempio:



$\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$\beta = 2\varepsilon_2$

base di H: $z_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad z_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Radici $\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta$. Per $z \in H$:

$$ad(z) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & \alpha(z) & & & & & \\ & & & \beta(z) & & & & \\ & & & & (\alpha+\beta)(z) & & & \\ & & & & & (2\alpha+\beta)(z) & & \\ & & & & & & -\alpha(z) & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\mathrm{ad}(z_1) = \mathrm{diag}(0,0,1,0,1,2,-1,0,-1,-2)$ $\mathrm{ad}(z_2) = \mathrm{diag}(0,0,-1,2,1,0,1,-2,-1,0,-1)$.

Quindi $K(z_1, z_1) = 12$, $K(z_1, z_2) = 0$, $K(z_2, z_2) = 12$

Ora, $\alpha(az_1 + bz_2) = a - b = K(t_\alpha, az_1 + bz_2)$, $\beta(az_1 + bz_2) = 2b = K(t_\beta, -)$

da cui $t_\alpha = \begin{pmatrix} 1/12 & & & \\ & -1/12 & & \\ & & 1/12 & \\ & & & -1/12 \end{pmatrix}$ $t_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{6} & & \\ & & -\frac{1}{6} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha(t_\alpha) = \frac{1}{6}$ $\beta(t_\beta) = \frac{1}{3}$, $h_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $h_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha(h_\alpha) = \beta(h_\beta) = 2$, $\beta(h_\alpha) = -2$ e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta + 2\alpha \in \Phi$

$\alpha(h_\beta) = -1$, e $\alpha - \alpha(h_\beta) = \alpha + \beta \in \Phi$.

Def.: Poniamo $E_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\, \Phi$ $\left(= \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \{ \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{\text{base di } H^* \text{ di elem. di } \Phi} \} \right)$

e anche $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$ ($\otimes_{\mathbb{Q}}$ = prodotto tensoriale di spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$)

Oss.: 1) $\dim_{\mathbb{Q}}(E_{\mathbb{Q}}) = \dim_k H^*$ perché entrambi hanno base $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

2) E è uno sp. vett. reale: la somma è def. perché è uno sp. vett. su $\mathbb{Q}$, e il prod. con a reale è indotto da $a \cdot (b \otimes_{\mathbb{Q}} v) = (ab) \otimes_{\mathbb{Q}} v$.

Esercizio: I vettori $1 \otimes_{\mathbb{Q}} \alpha_1, \dots, 1 \otimes_{\mathbb{Q}} \alpha_n$ formano una base (su $\mathbb{R}$) di E, da cui $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$. (Identif. questi vett. con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nel seguito)

Teorema: $K(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}$ $\forall \alpha,\beta \in \Phi$, quindi induce un'appl. $\mathbb{Q}$-bil.

$E_\mathbb{Q} \times E_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ e un'appl. $\mathbb{R}$-bilineare

$E \times E \to \mathbb{R}$. Quest'ultima è un prodotto scalare $(-,-)$, con cui E diventa uno spazio euclideo. Valgono inoltre:

1) Φ genera E (come sp. vett. su $\mathbb{R}$) e $0 \notin \Phi$

2) $\forall \alpha \in \Phi$: $\mathbb{Z}\alpha \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

3) $\forall \alpha,\beta \in \Phi$: $\beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$

4) — " — $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$

Dim: Ripartiamo da L e H^*. Scegliamo una base $(h_1, \dots, h_l, x_1, \dots x_m)$ di L dove $(h_1, \dots, h_l)$ è una base di H, e $x_i \in L_{\beta_i}$ dove $\Phi = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$.

Allora dati $\lambda,\mu \in H^*$: $\kappa(\lambda,\mu) = \kappa(t_\lambda, t_\mu) = tr(ad(t_\lambda)ad(t_\mu)) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \beta_i(t_\lambda)\beta_i(t_\mu) = \dots$$

perché
$$ad(t_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \beta_1(t_\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_m(t_\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\ldots = \sum_{\alpha\in\Phi} K(\alpha,\lambda)K(\alpha,\mu)$$

Allora $K(\lambda,\lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi} K(\lambda,\alpha)^2 \quad \forall\lambda\in H^*$. Con $\lambda=\beta\in\Phi$:

$$\frac{1}{K(\beta,\beta)} = \sum_{\alpha\in\Phi} \left(\frac{K(\beta,\alpha)}{K(\beta,\beta)}\right)^2 \in \mathbb{Q}\ , \text{ cioè } \ K(\beta,\beta)\in\mathbb{Q} \ \forall\beta\in\Phi.$$

Da questo segue $K(\beta,\alpha) \left(= \frac{K(\beta,\alpha)}{K(\beta,\beta)}\cdot K(\beta,\beta)\right) \in \mathbb{Q} \quad \forall\alpha,\beta\in\Phi$.

Ma allora $K(\lambda,\lambda)$ è somma di quadrati in $\mathbb{Q}$ $\forall\lambda\in E_{\mathbb{Q}}$

$$K(\lambda,\lambda)\geq 0 \ \forall\lambda\in E_{\mathbb{Q}}$$

Inoltre $K|_{E_{\mathbb{Q}}\times E_{\mathbb{Q}}}$ è nondeg., perché ha la stessa matrice di $K|_{H\times H}$. Quindi induce un prod. scalare su E. Le altre proprietà 1) - 4) le abb. già viste.

$\square$

SISTEMI DI RADICI

Sia E uno sp. euclideo, prod. scalare $(-,-)$.

<u>Def</u>: Un sottoinsieme finito $\overset{\text{non vuoto}}{\vee}$ $\Phi \subseteq E$ si dice <u>sistema di radici</u> se valgono le proprietà 1) - 4) del teorema precedente.

<u>Def</u>: Dato $\alpha \in E \setminus \{0\}$, definiamo $\alpha^\vee : E \longrightarrow \mathbb{R}$, cioè $\alpha^\vee \in E^*$,

$$\beta \longmapsto \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

e $s_\alpha : E \to E$
$\beta \mapsto \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$.

Dato $\eta \in E^*$, scriviamo $\langle \alpha, \eta \rangle = \eta(\alpha)$, quindi $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$

<u>Oss.</u>: 1) Att.: può succedere $(\alpha+\gamma)^\vee \neq \alpha^\vee + \gamma^\vee$, cioè $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ <u>non</u> è lineare (e $0^\vee$ <u>non</u> è definito).

2) $s_\alpha(\beta)$ è il „riflesso" di β risp. all'iperpiano $\alpha^\perp$ ortogonale ad α.

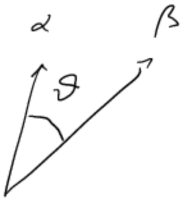
<u>Esempi</u>: 1) Esagono regolare e 8 punti sul quadrato, come visto da $\mathfrak{sl}(3)$ e $\mathfrak{sp}(4)$.

2) se $\dim(E) = 1$ prendiamo $\alpha \in E \setminus \{0\}$ e $\Phi = \{\pm\alpha\}$

<u>Esercizio</u>: Se $\dim(E) = 1$ allora $|\Phi| = 2$.

Vediamo i possibili valori di $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ con $\alpha, \beta \in \Phi$. Abb.

$$\begin{array}{c} c \\ \rotatebox{-90}{$\geq$} \\ 0 \end{array} = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \cdot \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 4 \cdot \underbrace{\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \cdot \frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}}_{\cos^2(\vartheta)} \leq 4 \text{ per Cauchy-Schwarz.}$$

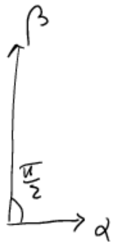


Possibilità: supponiamo α, β non proporzionali, $(\alpha,\beta) \geq 0$, $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ da cui

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \geq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$$
$$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$$

	c	$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$	ϑ	$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$	$\|\alpha\| = \|\beta\|$	
$(\cos(\theta) = 0)$	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	?	?	
$(\cos(\theta) = \frac{1}{2})$	1	1	1	$\frac{\pi}{3}$	1	sì	$\cos^2(\theta) = \frac{1}{4}$
$(\cos(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}})$	2	2	1	$\frac{\pi}{4}$	2	no	$\cos^2(\vartheta) = \frac{1}{2}$
$(\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2})$	3	3	1	$\frac{\pi}{6}$	3	no	$\cos^2(\vartheta) = \frac{3}{4}$
$(\cos(\theta) = 1)$	4	escluso perché α e β sarebbero proporzionali					

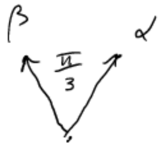
$c = 0$



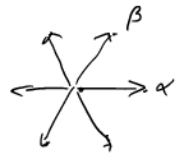
Allora Φ contiene

che si chiama $\boxed{A_1 \times A_1}$

$c = 1$

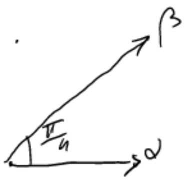


$\Phi \supseteq$

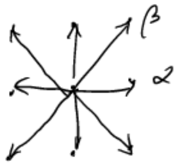


$= \boxed{A_2}$

$c = 2$

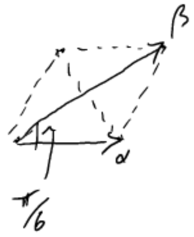


$\Phi \supseteq$



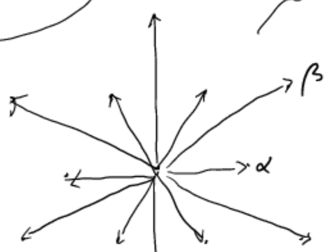
$= \boxed{B_2}$

$c = 3$



= equilatero

$\Phi \supseteq$



$= \boxed{G_2}$

Corollario (di queste possibilità) 1) $\Phi \cap \text{Span}\{\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$, e date $\alpha, \beta \in \Phi$ non propor. vale 2) $\Phi \cap \text{Span}\{\alpha, \beta\} =$ una di queste 4 figure $A_1 \times A_1$, A_2, B_2, G_2.

Dim.: 1) esercizio. 2) Poss. assumere l'angolo fra α e β minimo $\overset{(\neq 0)}{}$, allora 2) deriva da 1). □

Lemma: Siano $\alpha, \beta \in \Phi$ non proporzionali. Se $(\alpha, \beta) > 0$ allora

$\alpha-\beta\in\Phi$; se $(\alpha,\beta)<0$ allora $\alpha+\beta\in\Phi$

Dim.: La seconda deriva dalla prima, dim. la prima. Se $(\alpha,\beta)>0$ allora $\langle\beta,\alpha^\vee\rangle>0$ e sappiamo che in questo caso $1\in\{\langle\beta,\alpha^\vee\rangle,\langle\alpha,\beta^\vee\rangle\}$ quindi $\alpha-\langle\alpha,\beta^\vee\rangle\beta=\alpha-\beta$ opp $\beta-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle\alpha=\beta-\alpha$.

□

Corollario: Date $\alpha,\beta\in\Phi$ non proporzionali, siano $r,q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ massimi tali che $\beta+q\alpha$, $\beta-r\alpha\in\Phi$. Allora $\beta+q\alpha, \beta+(q-1)\alpha, \dots, \beta-(r-1)\alpha, \beta-r\alpha$ sono in Φ, e $r-q=\langle\beta,\alpha^\vee\rangle$.

Dim.:

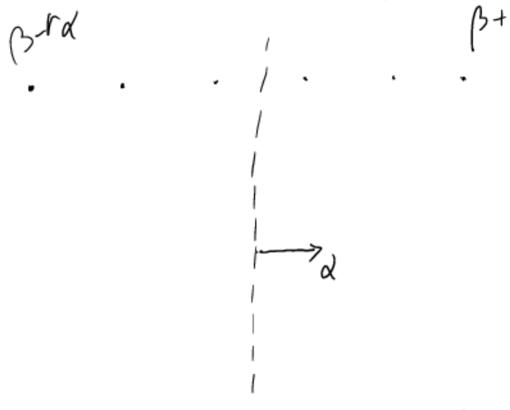
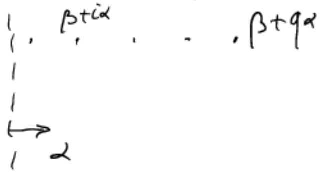


Abb. $\Phi\ni s_\alpha(\beta+q\alpha)=$

$$=\beta+q\alpha-\langle\beta+q\alpha,\alpha^\vee\rangle\alpha=$$
$$=\beta+(q-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle-2q)\alpha$$
$$=\beta+(\underbrace{-q-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle}_{\overset{\parallel}{-r}})\alpha \Rightarrow r-q=\langle\beta,\alpha^\vee\rangle$$

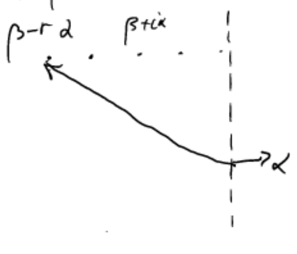
Se $r=q=0$, allora $\alpha\perp\beta$ per il Lemma e abb. finito.

Altrimenti $r>0$ oppure $q>0$, e ci sono in Φ vettori del tipo $\beta+i\alpha$ con $(\beta+i\alpha,\alpha)\neq 0$. Se $\exists i \mid (\beta+i\alpha,\alpha)>0$ e $\beta+i\alpha\in\Phi$ allora $(\beta+r\alpha,\alpha)>0$, e per il lemma sono in Φ anche



$\beta+(q-1)\alpha$, $\beta+(q-2)\alpha$, … fino all'ultimo che ha prod. scalare ≥ 0 con α.

Se $\exists i \mid (\beta+i\alpha,\alpha)<0$ e $\beta+i\alpha\in\Phi$, allora $(\beta-r\alpha,\alpha)<0$ e per il lemma sono in Φ anche $\beta-(r-1)\alpha$, $\beta-(r-2)\alpha$, …. fino all'ultimo che ha prod. scalare ≤ 0 con α.



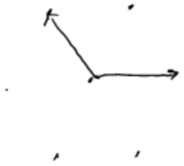
□

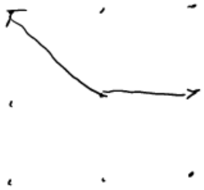
Def.: $\Delta \subseteq \Phi$ si dice *base* di Φ se

1) Δ è una base di E
2) $\forall \alpha \in \Phi$: i coeff. di α rispetto a Δ sono tutti ≥ 0 opp. tutti ≤ 0

Gli elem. di Δ si chiamano radici *semplici*, e le radici si distinguono in *positive* (Φ^+) se i loro coeff. sono ≥ 0, e *negative* (Φ^-) se i coeff. sono ≤ 0. Si scrive $\alpha > 0$ se $\alpha \in \Phi^+$, $\alpha < 0$ se $\alpha \in \Phi^-$.
Le riflessioni s_α con $\alpha \in \Delta$ si chiamano *riflessioni semplici*.

Es.:



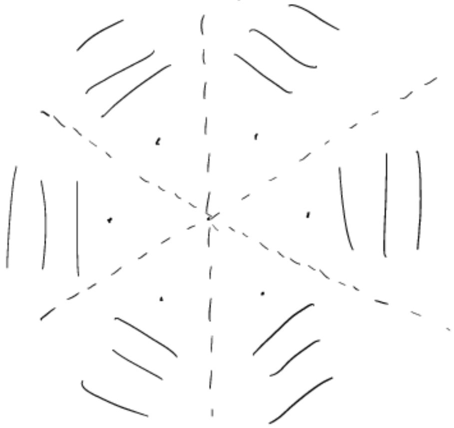


Dimostriamo che le basi esistono.

Def.: 1) Gli elem. di $E^{reg} = E \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^{\perp} \right)$ si dicono *regolari*.

2) Le comp. connesse di E^{reg} si dicono *camere di Weyl*.

Es.:



6 camere di Weyl

3) Dato γ vettore regolare, definiamo

$\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma,\alpha) > 0\}$, analog $\Phi^-(\gamma)$,

$\Delta(\gamma) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha$ <u>indecomponibile</u> in $\Phi^+(\gamma)$, cioè non si può scrivere come $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ con $\alpha_i \in \Phi^+(\gamma)\ \forall i\}$.

<u>Proposizione</u>: $\forall \gamma \in E^{reg}$; $\Delta(\gamma)$ è una base.

<u>Dim.</u>: 1) Ogni elem. di $\Phi^+(\gamma)$ si scrive come comb. lin. di elem. di $\Delta(\gamma)$ a coeff. ≥ 0. Infatti, supp. per assurdo che $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ non si possa scrivere così, allora $\alpha \notin \Delta(\gamma)$. Poss. supporre α tale che (α,γ) sia minimo, inoltre α è decomp., quindi $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ con $\alpha_i \in \Phi^+(\gamma)$, e allora $\underset{>0}{(\gamma,\alpha_1)} + \underset{>0}{(\gamma,\alpha_2)} = \underset{>0}{(\gamma,\alpha)}$

quindi $(\gamma,\alpha_i) < (\gamma,\alpha)$: per minimalità α_1 e α_2 sono comb. lin. di elem. di $\Delta(\gamma)$ a coeff. ≥ 0, ma allora anche α: assurdo.

2) Siano $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ con $\alpha \neq \beta$, dim. che $(\alpha,\beta) \leq 0$. Se $(\alpha,\beta) > 0$ allora $\alpha - \beta$, $\beta - \alpha \in \Phi$, e una di esse è in $\Phi^+(\gamma)$. Allora

$$\alpha = \underbrace{(\alpha-\beta)}_{\in \Phi^+(\gamma)} + \beta \quad \text{opp.} \quad \beta = \underbrace{(\beta-\alpha)}_{\in \Phi^+(\gamma)} + \alpha$$ è decomponibile: assurdo

3) Dim. che $\Delta(\gamma)$ è lin. indipend.. Sia $\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} c_\alpha \alpha = 0$ con $c_\alpha \in \mathbb{R}$,

allora $$\sum_{c_\alpha > 0} c_\alpha \alpha = \sum_{c_\beta < 0} (-c_\beta)\beta = \delta.$$ Vale

$$(\delta,\delta) = \left(\sum_{c_\alpha>0} c_\alpha \alpha,\ \sum_{c_\beta<0} (-c_\beta)\beta\right) = \sum_{\substack{c_\alpha>0 \\ c_\beta<0}} \overbrace{-c_\alpha c_\beta}^{\geq 0}\ \overbrace{(\alpha,\beta)}^{\leq 0} \leq 0$$

quindi $\delta = 0$. Segue

$$0 = (\gamma,\delta) = \sum_{c_\alpha>0} \underset{\substack{\geqslant \\ 0}}{c_\alpha}\ \underset{\substack{> \\ 0}}{(\gamma,\alpha)} = \sum_{c_\beta<0} \underset{\substack{\geqslant \\ 0}}{(-c_\beta)}\ \underset{\substack{> \\ 0}}{(\gamma,\beta)}$$

da cui $c_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in \Delta(\gamma)$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Esistono basi di Φ.

<u>Dim.</u>: $E^{reg} \neq \{0\}$ (dim.: esercizio. Svolgim.: fissiamo $\alpha \in \Phi$ e consid. $\beta^\vee|_{\alpha^\perp}$ per ogni $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$: è un funzionale non nullo, quindi per induz. (su dim(E)) $\exists \gamma_0 \in \alpha^\perp \mid (\gamma_0,\beta) \neq \{0\}\ \forall \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$, ora $\langle \gamma_0 + t\alpha_0, \alpha_0^\vee \rangle = 2t$, $\langle \gamma_0 + t\alpha_0, \beta^\vee \rangle = \langle \gamma_0, \beta^\vee \rangle + t \langle \alpha_0, \beta^\vee \rangle$. Per $t > 0$ piccolo abbastanza, $\gamma_0 + t\alpha_0 \in E^{reg}$).

$\square$

<u>Prop.</u>: Sia $\Delta \subseteq \Phi$ base. Allora esiste $\gamma \in E^{reg} \mid \Delta = \Delta(\gamma)$.

<u>Dim.</u>: 1) Esiste $\gamma \in \Phi$ tale che $(\gamma,\alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta$: esercizio (svolgimento: $\alpha \mapsto (-,\alpha)$ è un isom. $E \to E^*$, quindi ad es. $\exists \gamma \in E \mid (\gamma,\alpha) = 1 \ \forall \alpha \in \Delta$).

2) Un tale γ è regolare perché se avessi $(\gamma,\beta) = 0$ per $\beta \in \Phi$, allora $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$, poss. assumere $c_\alpha \geqslant 0\ \forall \alpha$, e allora

$$0 = \left(\gamma, \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha\right) = \sum_{\alpha\in\Delta} \overset{\text{almeno un } c_\alpha \text{ è } >0}{c_\alpha}(\gamma,\alpha) > 0 \quad ; \text{ assurdo.}$$

3) Vale $\Phi^+ \subseteq \Phi^+(\gamma)$, e $\Phi^- \subseteq \Phi^-(\gamma)$, quindi sono due uguaglianze.

4) Ogni $\alpha \in \Delta$ è indecomp. in Φ^+, perché se $\Delta \ni \alpha = \overset{\text{con } \alpha_i \in \Phi^+}{\overbrace{\alpha_1 + \alpha_2}}$ allora scriviamo α_1, α_2 come comb. lin. di Δ, e si contraddice il fatto che Δ è una base.

Quindi α è indecomp. in $\Phi^+(\gamma)$, e allora $\Delta \subseteq \Delta(\gamma)$.
Visto che Δ e $\Delta(\gamma)$ sono basi di E, segue $\Delta = \Delta(\gamma)$.

□

Corollario: Se $\alpha, \beta \in \Delta$ sono distinte, allora $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Dim.: Sia $\gamma \in E^{reg}$ tale che $\Delta = \Delta(\gamma)$. Allora $(\alpha,\beta) \leq 0$ è stato già visto nella dim. precedente.

□

Corollario: {camere di Weyl} è in biiezione con {basi di Φ} tramite

$$C \longmapsto \Delta(\gamma) \quad \text{con } \gamma \in C.$$

Def.: Fissata una base $\Delta = \Delta(\gamma)$, la camera C tale che $C \ni \gamma$ è detta camera fondamentale.

Gruppo di Weyl

Sia W il sottogruppo di $GL(E)$ (in realtà $O(E)$) generato da s_α per ogni $\alpha \in \Phi$. Fissiamo una base Δ di W.

Oss.: W stabilizza Φ e se $w \in W$ fissa ogni radice allora $w = Id_E$, quindi $W \hookrightarrow S_E$. Segue che W è finito.

Lemma: Sia $\alpha \in \Delta$. Allora $s_\alpha(\beta) > 0 \quad \forall \beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, cioè s_α stabilizza $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$.

Dim.: Scriviamo $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$, $\quad c_\gamma \geq 0 \quad \forall \gamma$.

(allora >0)

Esiste $\gamma_0 \in \Delta - \{\alpha\}$ tale che $c_{\gamma_0} \neq 0$, da cui:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha = (c_\alpha - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha)\alpha + \underset{\overset{\vee}{0}}{c_{\gamma_0}} \gamma_0 + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha, \gamma_0\}} c_\gamma \gamma$$

da cui $s_\alpha(\beta) > 0$. $\square$

Corollario: Sia $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0} \beta$. Allora $s_\alpha(\delta) = \delta - \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$.

Dim.:

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta > 0 \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2} \overset{(s_\alpha(\alpha) = -\alpha)}{\alpha}, \qquad s_\alpha(\delta) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta > 0 \\ \beta \neq \alpha}} \beta - \frac{1}{2} \alpha =$$

(s_α permuta queste radici)

$$= \delta - \alpha.$$

Esercizio: Dim. che $(\delta, \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$ $\left(\text{sugg.: } \Phi^+ \setminus \{\alpha\} = \{\beta \mid (\beta, \alpha) > 0\} \cup \{\beta \mid (\beta, \alpha) < 0\}\right)$ scambiati da s_α

e che δ è regolare.

Teorema: W è generato dalle riflessioni semplici, cioè da s_α con $\alpha \in \Delta$.

Inoltre agisce in modo transitivo sulle basi.

Per la dim.:

Lemma: Data $\beta \in \Phi$, esiste Δ base che contiene β.

Dim.: Iniziamo con $\overset{\in E}{\gamma_0}$ tale che $(\gamma_0, \beta)=0$, $(\gamma_0, \alpha) \neq 0$ $\forall \alpha \in \Phi \setminus \{\beta, -\beta\}$.

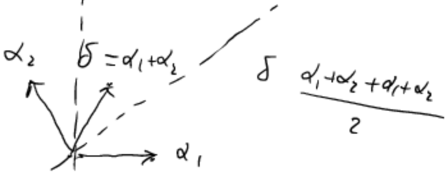
(Basta osservare che esistono punti di $\beta^\perp$ dove tutti i funzionali $(-, \alpha)|_{\beta^\perp}$ sono $\neq 0$, stessa dim. di $E^{reg} \neq \emptyset$.)

Ora: $(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \beta) = \varepsilon \|\beta\|^2$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \alpha) = (\gamma_0, \alpha) + \varepsilon(\beta, \alpha)$$

Se $\varepsilon > 0$ è abb. piccolo allora $(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \beta)$ è il più piccolo fra i prodotti scalari positivi di $\gamma_0 + \varepsilon\beta$ con le radici. Fissiamo un tale ε: $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon\beta$ è tale che $\beta \in \Delta(\gamma)$ per minimalità.

□



Dim. del teorema: Fissiamo una base $\Delta \subseteq \Phi$. Ric. $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$.

Dato $\gamma \in E^{reg}$, cerchiamo σ = prodotto di rifl. semplici tale che $\sigma(\gamma) \in C$ = camera fondament.. Scegliamo σ = un prodotto di rifl. semplici, con $(\delta, \sigma(\gamma))$ massimo, e verifichiamo $\sigma(\gamma) \overset{(?)}{\in} C$. Data $\alpha \in \Delta$ vale

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (s_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), s_\alpha \delta) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

da cui $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$. D'altronde $(\sigma(\gamma), \alpha) = (\gamma, \underbrace{\sigma^{-1}(\alpha)}_{\in \Phi}) \neq 0$, da cui $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta$. Segue: $\sigma(\gamma) \in C$, quindi il sgr di W gen. dalle riflessioni semplici agisce transit. sull'insieme delle basi.

Sia ora $\beta \in \Phi$ e consid. s_β. Per il lemma, esiste

Δ' base tale che $\beta \in \Delta'$, e sia σ prodotto di riflessioni semplici tale che $\sigma(\Delta') = \Delta$, cioè $\sigma(\beta) = \alpha$. Allora vale

$$s_\alpha = \sigma\, s_\beta\, \sigma^{-1},$$ perché $\sigma s_\beta \sigma^{-1}$ è una riflessione che manda α in $\sigma(s_\beta(\sigma^{-1}(\alpha))) = \sigma(s_\beta(\beta)) = \sigma(-\beta) = -\alpha$.

(Si può anche fare la verifica: $s_\alpha(\omega) = \omega - \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \alpha$
$\sigma(s_\beta(\sigma^{-1}(\omega))) = \ldots = ?$)

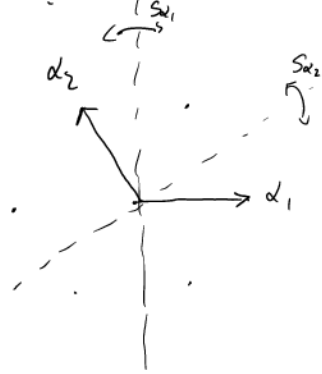
Allora $s_\beta = \sigma^{-1} s_\alpha \sigma$, cioè s_β è prodotto di rifless. semplici.

$\square$

Def.: La lunghezza $\overset{\ell(w)}{\vee}$ di $w \in W$ è $\min\{t \mid \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta \mid w = s_{\alpha_1} \circ \ldots \circ s_{\alpha_t}\}$

Un'espressione $w = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_t}$ con $t = \ell(w)$ si dice espressione ridotta di w.

Es.:



$W \simeq S_3$, rifless. semplici $(1\ 2), (2\ 3)$

$$\begin{array}{cc} (1\ 2) & (2\ 3) \\ \downarrow & \downarrow \\ s_{\alpha_1} & s_{\alpha_2} \end{array}$$

radici $= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i,j \in \{1,2,3\}\}$

$\sigma \in S_3$ agisce sulle radici come $\sigma(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \varepsilon_{\sigma(i)} - \varepsilon_{\sigma(j)}$

$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
$\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$

$s_{\alpha_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ $(1 \leftrightarrow 2)$

$s_{\alpha_1}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ $(1 \leftrightarrow 2)$

$\ell((1\ 3)) = 3$, $(1\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$

Teorema: $\ell(w) = \left|\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) < 0\}\right| =: n(w)$.

Per la dim.:

rifl. semplici, non nec. distinte, $s_i = s_{\alpha_i}$ con $\alpha_i \in \Delta$

Lemma: Se $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ e $w(\alpha_t) > 0$ allora esiste $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ tale che $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{i-1} s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_{t-1}$

Dim.: $w(\alpha_t) > 0$, $(s_2 \cdot \ldots \cdot s_t)(\alpha_t) \gtrless 0, \ldots, s_{t-1} s_t(\alpha_t) \gtrless 0$, $s_t(\alpha_t) < 0$

C'è allora un i tale che $s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_t(\alpha_t) < 0$,

$\beta = s_i s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_t(\alpha_t) > 0$, e abb. $s_i(\beta) = s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_t(\alpha_t)$

Allora β cambia segno con s_i, da cui $\beta = \alpha_i$. Cioè

$\overbrace{s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_t}^{\sigma}(\alpha_t) = -\alpha_i$, e oss. $s_{\alpha_i} = s_{-\alpha_i}$,

da cui segue $\sigma s_t \sigma^{-1} = s_i$, cioè $s_i = s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_t \cdot s_t \cdot s_t \cdot \ldots \cdot s_{i+1} =$

$= s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_{t-1} s_t s_{t-1} \cdot \ldots \cdot s_{i+1}$, e allora

$$w = (s_1 \cdot \ldots \cdot s_{i-1}) s_i (s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_t) = (s_1 \cdot \ldots \cdot s_{i-1})(s_{i+1} \cdot \ldots \cdot \cancel{s_t} \cdot \ldots \cdot \cancel{s_{i+1}}) \cdot$$

$$\cdot (\cancel{s_{i+1}} \cdot \ldots \cdot \cancel{s_t}) = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{i-1} \cdot s_{i+1} \cdot \ldots \cdot s_{t-1}.$$

□

Corollario: Se $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ è espressione ridotta, allora $w(\alpha_t) < 0$.

Dim. teorema: Per induzione su $\ell(w)$. Base dell'induzione:

$$\ell(Id) = 0 = |\{\alpha > 0 \mid Id(\alpha) < 0\}| \quad \text{ok}$$

Passo induttivo. Sia $w = s_1 \cdots s_t$ scrittura ridotta, $t = \ell(w)$, allora $w(\alpha_t) < 0$. Consid. $ws_t = s_1 \cdots s_{t-1}$, abb. $ws_t(\alpha_t) > 0$. Quindi:

1) data $\beta > 0$ con $ws_t(\beta) < 0$ abb. $s_t(\beta) \neq \alpha_t$ e $w(s_t(\beta)) < 0$, viceversa

2) data $\beta > 0$ con $\beta \neq \alpha_t$ e $w(\beta) < 0$ abb. $ws_t(s_t(\beta)) < 0$. Deduciamo che s_t induce una biiezione

$$\{\beta \in \Phi^+ \mid ws_t(\beta) < 0\} \underset{1:1}{\overset{s_t}{\longleftrightarrow}} \{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_t\} \mid w(\beta) < 0\}.$$ Visto che $w(\alpha_t) < 0$, segue che ws_t manda in negativo una radice pos. di meno rispetto a w.

Cioè $n(ws_t) = n(w) - 1$. D'altronde

$$\ell(ws_t) = \ell(s_1 \cdots s_{t-1}) \underset{\uparrow}{=} t - 1 = \ell(w) - 1$$

(se scrivessi ws_t con meno di $t-1$ generatori, scriverei w con meno di t generatori)

Per ipotesi induttiva: $n(ws_t) = \ell(ws_t)$, segue $\ell(w) = n(w)$. □

Corollario: W agisce in modo semplicem. transitivo sull'insieme delle basi di Φ.

Dim.: Supp. $w_1(\Delta) = w_2(\Delta)$, allora $w_2^{-1} \circ w_1(\Delta) = \Delta$ cioè $n(w_2^{-1} \circ w_1) = 0$, allora $\ell(w_2^{-1} \circ w_1) = 0$, cioè $w_2^{-1} \circ w_1 = e$, $w_2 = w_1$. □

Prop.: Data C camera di Weyl, $\overline{C}$ è dominio fondam. per W, cioè ogni W-orbita di E interseca $\overline{C}$ in un solo punto.

Dim.: Poss. supporre C= camera fondam.. Sia $\lambda \in E$, esiste w tale che $w(\lambda) \in \overline{C}$: esercizio (si prenda $w \mid (w(\lambda), \gamma)$ massimo).

Unicità: siano $w_1, w_2 \in W$ tali che $\underset{\mu_1}{\underset{\parallel}{w_1(\lambda)}}, \underset{\mu_2}{\underset{\parallel}{w_2(\lambda)}} \in \overline{C}$, cioè

$\underbrace{w_2 w_1^{-1}}_{\sigma}(\mu_1)=\mu_2$. Scriviamo $\sigma = s_1 \cdots s_t$ scrittura ridotta, $\sigma(\alpha_t)<0$.

Ora $$0 \geqslant (\mu_2, \sigma(\alpha_t)) = (\sigma^{-1}(\mu_2), \alpha_t) = (\mu_1, \alpha_t) \geqslant 0$$

da cui $(\mu_1, \alpha_t) = 0 = (\mu_2, \sigma(\alpha_t))$.

Allora $$\sigma(\mu_1) = s_1 \cdots \underbrace{s_t(\mu_1)}_{\mu_1 - \underbrace{\langle \mu_1, \alpha_t^\vee \rangle \alpha_t}_{0}} = s_1 \cdots s_{t-1}(\mu_1),$$ quindi

abb. trovato un elem. di lungh. $\ell(\sigma)-1$ che manda μ_1 in μ_2. Proseguendo, si arriva a lunghezza $=0$, cioè $\mu_1=\mu_2$.

□

Classificazione dei sistemi di radici

<u>Def.</u>: Sia $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base di un sist. di radici Φ, la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle & \\ \langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle & \cdots & \\ \cdots & & \end{pmatrix} = \left(\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$$

è detta <u>matrice di Cartan</u> di Φ. E' indipendente dalla scelta di Δ (a meno di rinumerarne gli elem.) perché W agisce in modo transitivo sull'insieme delle basi.

<u>Oss.</u>: Se α_i e α_j sono ortogonali, $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 0$.

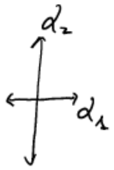
Se $i=j$ allora $\langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 2$, cioè sulla diagonale della matrice le entrate sono uguali a 2.

Se $i \neq j$ e α_i non è ortogonale a α_j:

se α_j è lunga quanto α_i o più lunga allora $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$.

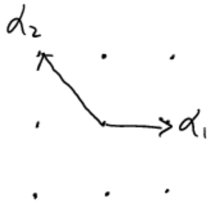
se α_i è lunga quanto α_j o più lunga allora $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1, -2,$ opp. -3 (a seconda di $-\frac{\|\alpha_i\|^2}{\|\alpha_j\|^2}$)

Esempi:

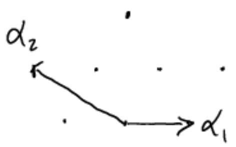


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



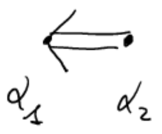
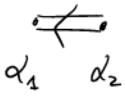
$$\begin{pmatrix} 2 & \overset{\langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle}{\nearrow -1} \\ \underset{\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle}{-2} & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Def.: Il grafo di Coxeter di Φ è il grafo che ha Δ come insieme di vertici, e fra α_i e α_j abb. $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \cdot \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$ lati $(= 0, 1, 2$ opp. 3 lati$)$.

Il diagramma di Dynkin di Φ è ottenuto dal grafo di Coxeter aggiungendo una „freccia" da α_i a α_j se α_i è più lunga di α_j:

es. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$  (opp. )

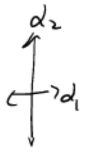
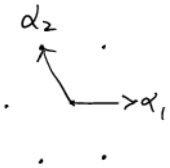
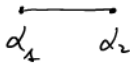
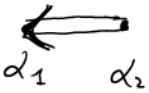
Esempi: 

diagramma di Dynkin: 





(quadrato)

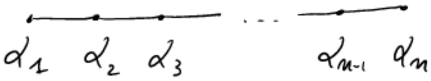


(due esagoni)

(α_2 è più lunga di α_1)

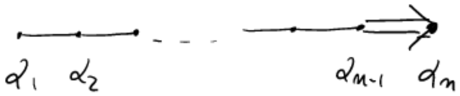
Nome:

$\mathfrak{sl}(n+1)$:



A_n $(n \geq 1)$

$\mathfrak{so}(2n+1)$:

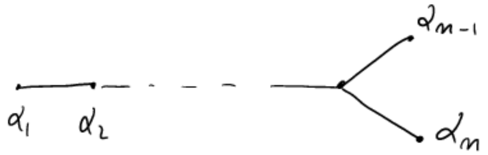


B_n $(n \geq 1)$

$\mathfrak{sp}(2n)$:

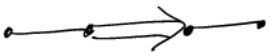
C_n $(n \geq 1)$

$\mathfrak{so}(2n)$:



D_n $(n \geq 2)$

Altri diagrammi di sistemi di radici:



F_4

G_2 (i due esagoni $= \Phi$)

E_6

E_7

E_8

Casi particolari: $A_1=B_1=C_1$, $B_2=C_2$, $D_3=A_3$, $D_2=$ due copie sconnesse di A_1.

Vedremo che il diagramma di Dynkin classifica Φ, a meno di isomorfismo, dove questa nozione è data per rispecchiare gli isom. fra alg. di Lie semisemplici.

Def: Siano $\Phi \subseteq E$, $\Phi' \subseteq E'$ sistemi di radici in due spazi euclidei. Φ e Φ' si dicono *isomorfi* se esiste $f: E \to E'$ isomorfismo lineare (non necess. isometria) tale che $f(\Phi)=\Phi'$, e

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)^\vee \rangle \qquad \forall \alpha,\beta \in \Phi$$

(equivalentemente: $\langle -, \beta^\vee \rangle = \langle f(-), f(\beta)^\vee \rangle$ come funzioni su E, $\forall \beta \in \Phi$).

Prop.: Il diagramma di Dynkin determina univocam. Φ a meno di isomorfismi. Cioè se Φ' è un altro sist. di radici, ed esiste una biiezione $f: \Delta \to \Delta'$ dove Δ e Δ' sono basi, e f induce un isomorfismo di diagrammi (cioè i lati e le frecce sono conservati da f), allora f si estende a $f: E \to E'$ che rende Φ e Φ' isomorfi.

Dim.: Il diagramma determina univocam. la matrice di Cartan, quindi f soddisfa $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)^\vee \rangle \quad \forall \alpha,\beta \in \Delta$.

Visto che Δ e Δ' sono basi, f si estende linearmente a isom. lineare $f: E \to E'$. Inoltre:

$$s_{f(\alpha)}(f(\beta)) = \dots = f(s_\alpha(\beta)) \qquad \forall \alpha, \beta \in \Delta$$

Cioè

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_\alpha"] & E' \arrow[d, "s_{f(\alpha)}"] \\
E \arrow[r, "f"'] & E'
\end{tikzcd}$$

commuta: $s_{f(\alpha)} \circ f = f \circ s_\alpha$, cioè $s_{f(\alpha)} = f \circ s_\alpha \circ f^{-1}$.

Allora $w \longmapsto f \circ w \circ f^{-1}$ è un omom. di gruppi $W \to W'$, ovviam. iniettivo, e manda generatori in generatori. Quindi è un isomorfismo.

Data ora $\beta \in \Phi$, prendiamo $w \in W$ tale che $\beta = w(\alpha) \in \Delta$, allora

$$f(\beta) = \underbrace{(f \circ w \circ f^{-1})}_{\overset{\cap}{W'}} (\underbrace{f(\alpha)}_{\in \Delta'}) \in \Phi'$$

cioè f manda Φ in Φ'. Deduciamo $\overset{\text{da } \beta = w(\alpha)}{\vee}$ anche $s_{f(\beta)} = f \circ s_\beta \circ f^{-1}$, da cui $\langle -, \beta^\vee \rangle = \langle f(-), f(\beta)^\vee \rangle$.

$\square$

Def: Φ si dice riducibile se $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ (unione disgiunta) con

$\Phi_1 \perp \Phi_2$, Φ_i non vuoto.

Oss.: 1) Se $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ è riducibile, allora $E = \underbrace{(\operatorname{Span} \Phi_1) \oplus (\operatorname{Span} \Phi_2)}_{\text{ortogonali}}$,

e per un eserc. nei fogli settimanali Φ_i è un sist. di radici in $E_i = \operatorname{Span} \Phi_i$.

2) Φ riducibile è equivalente a richiedere $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ dove Δ = base di Φ, Δ_1, Δ_2 sottoinsiemi non vuoti e $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Infatti se $\Delta_1 \perp \Delta_2$ allora le riflessioni semplici di Δ_1 fissano ogni elem. di Δ_2, e viceversa. Segue che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ dove Φ_i = radici ottenute applicando sequenze di rifless. semplici di Δ_i a vettori di Δ_i.

3) Da 2) segue: Φ è irriducibile $\Longleftrightarrow$ il diagr. di Dynkin è connesso.

In generale Φ si decompone in modo unico come unione disgiunta di sottoinsiemi non vuoti $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_l$

dove $\Phi_i \perp \Phi_j$ $\forall i \neq j$, e Φ_i irriducibile $\forall i$ (chiaro perché il diagr. di Dynkin è unione disgiunta delle sue comp. connesse).

Ora quindi classificheremo i diagrammi connessi, che corrisp. ai sistemi di radici irriducibili.

Teorema: La lista $\overset{\substack{n\geq 1\\ \downarrow}}{A_n}, \overset{\substack{n\geq 2\\ \downarrow}}{B_n}, \overset{\substack{n\geq 3\\ \downarrow}}{C_n}, \overset{\substack{n\geq 4\\ \downarrow}}{D_n}, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ è la lista completa e non ridondante dei diagrammi di Dynkin connessi.

Dim: Dimostriamo che un diagramma di Dynkin connesso è in questa lista.

Che tutti i diagrammi in lista corrispondano a sistemi di radici lo verificheremo negli esercizi.

Sia allora $\Delta = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ base di Φ. Normalizziamoli:

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}.$$

Allora:

1) $\varepsilon_1, .., \varepsilon_n$ sono lin. indip., di lunghezza 1

2) $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ $\forall i \neq j$

3) $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\forall i \neq j$

Chiameremo *ammissibile* una famiglia di vettori con le propr. 1), 2), 3), e da essa si costruisce il grafo di Coxeter come per Δ. Un grafo del genere si dirà *ammissibile*.

Passo 1: Nel grafo di Coxeter (di una fam. ammissibile con n elem.) ci sono al più $n-1$ coppie di punti collegati.

Dim.: Sia $v = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, allora $0 < \|v\|^2 = n + \sum_{i<j} 2 \cdot \underline{\underline{(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}}$

Segue $\underbrace{\sum_{i<j} 2\left|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\right|} < n$.

Inoltre: $4\left|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\right|^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ se $i \neq j$

da cui $|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)| \begin{cases} = 0 & \text{opp.} \\ \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Segue $\left|\{(i,j) \mid i<j \text{ e } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cioè vertici collegati}}}{(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0}\}\right| \leq \sum_{i<j} 2\left|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\right| < n$

□ (Passo 1)

Passo 2: Nel grafo di Coxeter non ci sono circuiti (es. 

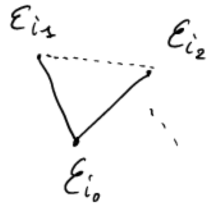
)

Dim.: Un sottoinsieme di una fam. ammissibile è ammissibile, e se avessimo un circuito che coinvolge m vertici, formerebbero una fam. ammissibile di m elem. e m coppie collegate: assurdo per passo 1.

□ (Passo 2)

Passo 3: Da ogni vertice partono al più 3 lati.

Dim.: Sia ε_{i_0} un elem. della famiglia, consid. $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_m}$ i vertici collegati a ε_{i_0} (sono quelli non ortogonali a ε_{i_0}).



Vale: ε_{i_j} e ε_{i_ℓ} sono ortogonali se $\ell \neq j$, altrimenti formerebbero un circuito con ε_{i_0}.

Consid. $(\varepsilon_{i_1}, .., \varepsilon_{i_m}, \varepsilon_{i_0})$, ortonormalizziamo questi vettori col procedim. di Gram-Schmidt, otteniamo $(\varepsilon_{i_1}, .., \varepsilon_{i_m}, \eta)$. Visto che otteniamo una base ortonormale di un sottosp. che contiene ε_{i_0}, abb.:

$$\varepsilon_{i_0} = (\varepsilon_{i_0}, \eta) \cdot \eta + \sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0}) \varepsilon_{i_j}$$

Calcoliamo $1 = (\varepsilon_{i_0}, \varepsilon_{i_0}) = \underbrace{(\varepsilon_{i_0}, \eta)^2}_{\boxed{\neq 0}} + \sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2$

perché ε_{i_0} non è comb. lin. di $\varepsilon_{i_1}, .., \varepsilon_{i_m}$

allora $\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2 < 1$.

Segue $\sum_{j=1}^{m} 4 (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2 < 4$ ed è un intero, quindi ≤ 3.

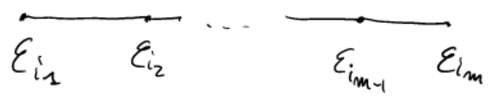
Inoltre $\sum_{j=1}^{m} 4 (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2$ è il numero totale di vertici che escono da ε_{i_0}.

In particolare, se c'è un „lato triplo": $\overset{\bullet}{\varepsilon_1} \equiv\!\bullet\, \varepsilon_2$ allora il diagramma ha solo questi due vertici e questi tre lati: otteniamo

G_2 

Possiamo assumere d'ora in poi: il diagramma di partenza ha solo lati semplici o doppi.

<u>Passo 4</u>: Supponiamo di avere un sottografo del tipo



di tipo A_m, cioè una sequenza di vertici $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_m}$ in cui gli unici lati sono semplici e fra ε_{i_j} e $\varepsilon_{i_{j+1}}$.

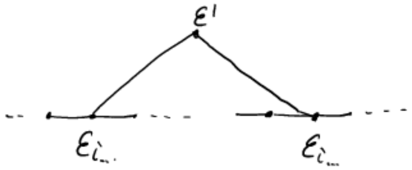
Consid. $\varepsilon_0 = \varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_m}$, allora la famiglia ottenuta cancellando $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_m}$ e rimpiazzandoli col solo ε_0 è ammissibile.

Dim.: Calcoliamo $(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = m + \sum_{l<j} 2(\varepsilon_{i_l}, \varepsilon_{i_j})$

inoltre $(\varepsilon_{i_l}, \varepsilon_{i_j}) = 0$ se $l \neq j-1$, e $(\varepsilon_{i_{j-1}}, \varepsilon_{i_j}) = \frac{-1}{2}$

quindi $(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = m + (-m+1) = 1$.

Sia infine ε' = vertice $\notin \{\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_m}\}$. Oss.:

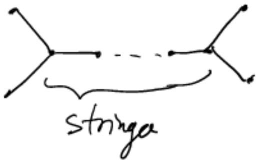


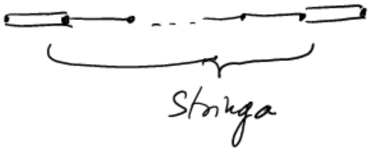
è impossibile perché non abbiamo circuiti, quindi ε' è collegato al massimo a <u>un</u> vertice in $\{\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_m}\}$, mettiamo ε_{i_j}, e allora:

$$4(\varepsilon', \varepsilon_0)^2 = \begin{cases} 4(\varepsilon', \varepsilon_{i_j})^2 & \text{se } \varepsilon_{i_j} \text{ esiste} \\ 0 & \text{se } \varepsilon' \text{ non è collegato ad alcun vertice in } \{\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_m}\}. \end{cases}$$

$\square$ (Passo 4)

Segue che ad ogni „stringa" non sono collegati più di 3 lati

ad es. 

e 

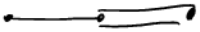
sono impossibili

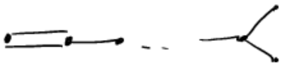
Passo 5) Se il diagramma è connesso e non ci sono vertici trivalenti (cioè da cui escono 3 lati), il diagramma è A_n.

(fine della dim.)

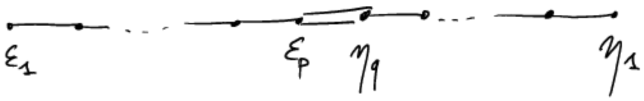
Supp. esista un vertice trivalente.

a) Supp. il vertice trivalente sia del tipo:



Il grafo continua da tutte e due le parti, ma senza altri vertici trivalenti, altrimenti avrei  già escluso, opp. , escluso per lo stesso motivo di prima.

Quindi abb.:



Qui usiamo: $\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i \,, \quad \eta = \sum_{j=1}^{q} j\eta_j \,.$

Allora $(\varepsilon,\eta)^2 < (\varepsilon,\varepsilon)\,(\eta,\eta)$ (Cauchy-Schwarz per vettori lin. indip.)

Inoltre $(\varepsilon,\eta)^2 = p^2q^2(\varepsilon_p,\eta_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}$, e abb.:

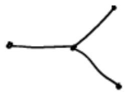
$$(\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} 2(i+1)i(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1}) =$$

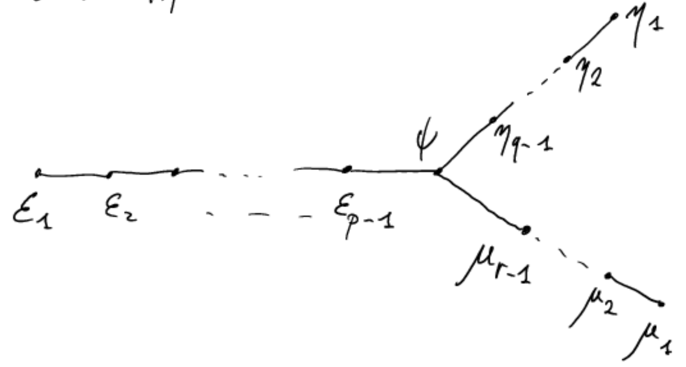
$$= \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} (i+1)i = \ldots = \frac{p(p+1)}{2}$$

analogam. $(\eta,\eta) = \frac{q(q+1)}{2}$

Concludiamo: $\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \cdot \frac{q(q+1)}{2}$, da cui $(p-1)(q-1) < 2$

Allora se $p=1$ opp. $q=1$, l'altro è libero e otteniamo B_n opp. C_n. Se $p>1$, $q>1$ allora $p=q=2$ e il grafo è , quindi F_4.

b) Supp. il vertice trivalente sia del tipo , il diagramma allora è del tipo:



$p>1$, $q>1$, $r>1$.

Definiamo $\varepsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\varepsilon_i$, $\eta = \sum_{i=1}^{q-1} i\eta_i$, $\mu = \sum_{i=1}^{r-1} i\mu_i$.

Consid. $$c_\varepsilon = \frac{(\varepsilon,\psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)(\psi,\psi)} \qquad c_\mu = \frac{(\mu,\psi)^2}{(\mu,\mu)(\psi,\psi)} \qquad (\text{ric. } (\psi,\psi)=1)$$

$$c_\eta = \frac{(\eta,\psi)^2}{(\eta,\eta)(\psi,\psi)}$$

(c_ε = quadrato del coseno dell'angolo formato da ε e ψ)

Ortonormalizziamo $(\varepsilon, \eta, \mu, \psi)$, otteniamo $c_\varepsilon + c_\eta + c_\mu < 1$

(come nel passo 3)). Cioè $$\frac{4(\varepsilon,\psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)} + \frac{4(\eta,\psi)^2}{(\eta,\eta)} + \frac{4(\mu,\psi)^2}{(\mu,\mu)} < 4.$$

Inoltre $(\varepsilon,\varepsilon) = \dots = \frac{p(p-1)}{2}$, $(\eta,\eta) = \frac{q(q-1)}{2}$, $(\mu,\mu) = \frac{r(r-1)}{2}$

e $(\varepsilon,\psi) = (p-1)(\varepsilon_{p-1},\psi)$ quindi $4(\varepsilon,\psi)^2 = (p-1)^2 \underbrace{4(\varepsilon_{p-1},\psi)^2}_{\overset{\shortparallel}{1}} = (p-1)^2$

Concludiamo $$\frac{(p-1)^2}{\frac{p(p-1)}{2}} + \frac{(q-1)^2}{\frac{q(q-1)}{2}} + \frac{(r-1)^2}{\frac{r(r-1)}{2}} < 4$$

allora $$\frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q} + \frac{r-1}{r} < 2$$

da cui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$. Possiamo assumere $p \geq q \geq r$,

e in questo caso $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{r}$. Segue $2 \leq r < 3$

cioè $r=2$ e concludiamo che il „ramo" più corto è lungo 1.

Segue anche $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{q}$, da cui $q=2$ opp 3.

Se $q=2$ allora p può essere qualsiasi, otteniamo D_n.

Se $q=3$ segue $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$, $p<6$, da cui:

$p=3 \rightsquigarrow E_6$

$p=4 \rightsquigarrow E_7$

$p=5 \rightsquigarrow E_8$

$\square$

Classificazione delle algebre di Lie semisemplici

Vedremo il teorema seguente:

Teorema: Sia Φ sistema di radici. Esiste L algebra di Lie semisemplice e $H \subseteq L$ sottoalgebra torale massimale con sist. di radici associato Φ, e L è unica a meno di isomorfismi.

Per completare la classificazione bisognerebbe dim. anche che Φ è indipendente dalla scelta di H in L. Questo non lo vedremo.

Per la dim. del teorema definiremo L per generatori e relazioni.

Studiamo allora algebre di Lie definite per generatori e relazioni. Si parte da un'algebra libera associativa.

Sia V spazio vettoriale, definiamo l'algebra tensoriale

$$T(V) = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots =$$

$$= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{V^{\otimes n}}_{\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ volte}}}$$

E' un'algebra associativa unitaria, col prodotto $T(V) \times T(V) \to T(V)$ definito da $(a_1 \otimes \dots \otimes a_s) \cdot (b_1 \otimes \dots \otimes b_r) = a_1 \otimes \dots \otimes a_s \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_r$ (estesa multilinearmente a tutta $T(V)$).

Per quest'algebra vale una proprietà universale:

sia $(v_1, \dots, v_d)$ una base di V, sia A una k-algebra associativa unitaria, siano $w_1, \dots, w_d \in A$, allora esiste un unico omomorfismo di k-algebre unitarie $T(V) \xrightarrow{\varphi} A$ tale che $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i$.

Inoltre $T(V)$ è un'algebra di Lie come al solito, ponendo $[a, b] = a \otimes b - b \otimes a$.

<u>Def</u>: L'algebra di Lie <u>libera</u> in generatori $x_1, \dots, x_n$ è definita come segue:

si considera uno spazio vettoriale V con base $x_1, \dots, x_n$, si definisca $\underline{\underline{L(x_1,..,x_m)}}$ = più piccola sottoalgebra di Lie di $T(V)$ contenente $x_1,..,x_m$.

Vale la seguente proprietà universale:

<u>Prop.</u>: Sia L algebra di Lie <u>contenuta in un'algebra associativa unitaria A</u> (in modo che L sia una sottoalgebra di Lie di A). Siano $y_1,..,y_m \in L$ arbitrari. Allora esiste un unico omomorfismo di algebre di Lie $\varphi: L(x_1,..,x_m) \to L$ tale che $\varphi(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1,..,m\}$.

<u>Dim.</u>: Usiamo $\psi: T(V) \to A$ tale che $\psi(x_i) = y_i$, è un omom. di algebre associative unitarie, quindi anche un omom. di algebre di Lie. Ora $L(x_1,..,x_m)$ è ottenuta da $x_1,..,x_m$ facendo bracket e comb. lineari ripetuti a piacere (perché quello che si ottiene in questo modo è in $L(x_1,..,x_m)$, ed è una sottoalgebra di Lie di $T(V)$, quindi deve coincidere con $L(x_1,..,x_m)$ per minimalità). Segue che $\psi(L(x_1,..,x_m)) \subseteq L$, poniamo $\varphi = \psi|_{L(x_1,..,x_m)} : L(x_1,..,x_m) \to L$. L'unicità di φ è chiara.

$\square$

<u>Def</u>: Siano $R_1,..,R_m \in L(x_1,..,x_m)$, e consid. I = ideale generato da $R_1,..,R_m$ in $L(x_1,..,x_m)$, cioè il più piccolo ideale che li contiene.

Allora $\dfrac{L(x_1,..,x_m)}{I}$ è detta algebra di Lie definita per generatori (gli $x_1,..,x_m$) e relazioni (gli $R_1,..,R_m$).

<u>Proposizione</u>: Sia L algebra di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalg. torale massimale, Φ sistema di radici. Scegliamo $\Delta \subseteq \Phi$ base, $\Delta = \{\alpha_1,..,\alpha_\ell\}$ poniamo $h_i = h_{\alpha_i}$, scegliamo $x_i \in L_{\alpha_i}$, $y_i \in L_{-\alpha_i}$ tali che $[x_i, y_i] = h_i$. Allora:

(S1) $[h_i, h_j] = 0 \qquad \forall i,j$

(S2) $[x_i, y_i] = h_i, \quad [x_i, y_j] = 0 \qquad \forall i \neq j$

(S3) $[h_i, x_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle x_j, \quad [h_i, y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle y_j \qquad \forall i,j$

(S^+_{ij}) $\left(ad(x_i)\right)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(x_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

(S^-_{ij}) $\left(ad(y_i)\right)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(y_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

<u>Dim.</u>: (S1) chiaro, H è abeliana

(S2): $[x_i, y_i] = h_i$ è la def., $[x_i, y_j] \in L_{(\alpha_i - \alpha_j)}$

non è una radice, per le propr. della base Δ

quindi $L_{\alpha_i - \alpha_j} = \{0\}$, e $[x_i, y_j] = 0$.

(S3) Vale ricordando $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \alpha_j(h_i)$

$\left(h_i = \frac{2\, t_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)$.

(S_{ij}^+) Consid. $ad(x_i)$: $L_{\alpha_j} \xrightarrow{ad(x_i)} L_{\alpha_j + \alpha_i} \xrightarrow{ad(x_i)} L_{\alpha_j + 2\alpha_i} \longrightarrow \dots$

Le radici coinvolte sono la α_i-stringa di α_j. Inoltre $\alpha_j - \alpha_i$ non è una radice, quindi la stringa è:

$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \dots, \alpha_j + q\alpha_i$

e ricordiamo $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{r}} - q = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$, cioè $q = -\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$.

Quindi l'ultima radice si ottiene applicando $ad(x_i)$ a x_j un numero di volte pari a $-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$, la relazione segue.

(S_{ij}^-): analogo a (S_{ij}^+). □

Teorema (Serre): Sia Φ sistema di radici, Δ = base di Φ.
Sia L algebra di Lie def. per generatori e relazioni:

generatori $x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell$ $(\ell = |\Delta|)$

relazioni: (S1), (S2), (S3), (S_{ij}^+), (S_{ij}^-) $(\forall i \neq j)$

Allora L ha dimensione finita, è semisemplice, $H = \mathrm{Span}\{h_1, \dots, h_\ell\}$

è una sottoalgebra torale massimale, e il sistema di radici corrispondente è isomorfo a Φ.

Per la dimostrazione:

$$\hat{L} = L(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_\ell, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\ell)$$ (algebra di Lie libera)

$\hat{K}$ = ideale generato dalle relaz. (S1), (S2), (S3) „applicate" agli elem. $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_\ell, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\ell$, e def.

$$L_0 = \frac{\hat{L}}{\hat{K}}$$

Poniamo (per abuso di notazione)

$$x_i = \hat{x}_i + \hat{K}$$
$$h_i = \hat{h}_i + \hat{K}$$
$$y_i = \hat{y}_i + \hat{K}$$

(i veri elem. x_i, h_i, y_i saranno nel quoz. di $\hat{L}$ per l'ideale generato da tutte le relazioni).

Per studiare L_0, studieremo prima di tutto una rappresentazione di $\hat{L}$ (che passa al quoziente). La definizione invita la costruzione dei moduli di Verma.

Partiamo da uno spazio vettoriale W con base $(v_1, \dots, v_\ell)$, considero

$V = T(W)$ e definisco una rappresentazione di $\hat{L}$ su V:

$\hat{\varphi} : \hat{L} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$:

$$\begin{cases} \hat{h}_j . 1 = 0 \\ \hat{h}_j . (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = -\left(c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j}\right) v_{i_1} \cdots v_{i_t} \end{cases}$$

(notazione: $v_{i_1} \cdots v_{i_t} = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_t}$)

($\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = c_{ij}$)

$$\begin{cases} \hat{y}_j . 1 = v_j \\ \hat{y}_j . (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = v_j \, v_{i_1} \cdots v_{i_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_j . 1 = 0 = \hat{x}_j . v_i \\ \hat{x}_j . (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = v_{i_1} \cdot \left(\hat{x}_j . v_{i_2} \cdots v_{i_t}\right) - \delta_{i_1,j}\left(c_{i_2,j} + \dots + c_{i_t,j}\right) v_{i_2} \cdots v_{i_t} \end{cases}$$

(definisce l'azione di $\hat{x}_j$ ricorsivamente).

Abb. definito $\hat{\varphi}$ scegliendo gli endomorfismi $\hat{\varphi}(\hat{x}_i)$, $\hat{\varphi}(h_i)$, $\hat{\varphi}(y_i)$, questo definisce un omom. di algebre associative

$$T\left(k\hat{x}_1 \oplus \dots \oplus k\hat{y}_\ell\right) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

per la proprietà universale dell'algebra tensoriale. Questo omom. si restringe a un omom. di algebre di Lie $\hat{L} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathfrak{gl}(V)$.

Proposizione: La rappr. $\hat{\varphi} : \hat{L} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ passa al quoziente

$$\varphi : L_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Dim.: Oss. che $\hat{h}_i$ agisce diagonalmente sulla base „solita" di $V=T(W)$ cioè la base data dai vettori $v_{i_1}\cdots v_{i_t}$ con $i_1,\dots,i_t \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Quindi $\hat{\varphi}(h_i)$ e $\hat{\varphi}(h_j)$ commutano $\forall i,j$, cioè vale (S1).

Calcoliamo $[\hat{\varphi}(x_i), \underbrace{\hat{\varphi}(y_j)}]$ sui vettori di questa base:

($\hat{y}$ è fare il prodotto tensoriale a sinistra con v_j)

$$\hat{x}_i \underbrace{\hat{y}_j \cdot v_{i_1}\cdots v_{i_t}}_{v_j\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_t}} - \hat{y}_j \hat{x}_i v_{i_1}\cdots v_{i_t} = \cancel{v_j(\hat{x}_i\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_t})} - \delta_{j,i}(c_{i_1,i}+\dots+c_{i_t,i})\cdot$$
$$v_{i_1}\cdots v_{i_t} - v_j\cdot\cancel{(\hat{x}_i\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_t})} =$$
$$= \delta_{ji}\,\hat{h}_i\, v_{i_1}\cdots v_{i_t}$$

vale per $t \geq 1$ (cioè se ho vettori $v_{i_1}\cdots v_{i_t}$), inoltre

$$(\hat{x}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \underbrace{\hat{x}_i). 1} = \underbrace{\hat{x}_i\, \hat{v}_j}_{\substack{\vee\\ 0}} - 0 = 0 = \hat{h}_i . 1$$

Cioè vale (S2).

Vediamo (S3) per le y:

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i). 1 = \hat{h}_i\, v_j = -c_{ji} v_j = (-c_{ji}\hat{y}_j). 1$$
$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \underset{\nwarrow}{\hat{h}_i}). \underbrace{v_{i_1}\cdots v_{i_t}} = \dots = -c_{ji}\, v_j \cdot v_{i_1}\cdots v_{i_t} = (-c_{ji} y_j)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_t}$$

quindi (S3) per le y vale.

Vediamo (S3) per le x:

usiamo un'osservazione: $\hat{h}_i\, \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = -\left(c_{i_1,i} + \ldots + c_{i_t,i} - c_{ji}\right) \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$

dim.: esercizio, per induzione su t

Da questo segue:

$$\left(\underbrace{\hat{h}_i\, \hat{x}_j}_{} - \hat{x}_j\, \hat{h}_i\right).1 = 0$$

$$(\text{—}\,,\ \text{——}).v_{i_1} \cdots v_{i_t} = \Big(-\left(c_{i_1,i} + \ldots + c_{i_t,i} - c_{ji}\right) + \left(c_{i_1,i} + \ldots + c_{i_t,i}\right)\Big)$$

$$\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = c_{ji}\, \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$$

cioè vale (S3) per le x.

$\square$

Teorema: 1) $(h_1, \ldots, h_l)$ è una base di una sottoalgebra abeliana H di L_0.

2) $L_0 = Y \oplus H \oplus X$ (somma diretta come sottosp. vettoriali; non nec. come algebre di Lie)

dove Y = sottoalg. di Lie gen. da $y_1, \ldots, y_l$

X = —, ——— $x_1, \ldots, x_l$

Dim.: 1) Dimostriamo che $\mathrm{Span}\{h_1, \ldots, \hat{h}_l\} \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$.

Infatti se $\hat{\varphi}\left(\sum a_j \hat{h}_j\right) = 0$ allora applicato a v_i

implica $-\sum_j a_j c_{ij} = 0 \quad \forall i$.

Ora, la matrice di Cartan è invertibile anche per un sistema di radici astratto (stessa dim. vista per il sistema di radici di un'alg. di Lie semisemplice), quindi $a_1 = \dots = a_\ell = 0$, e allora
$\mathrm{Span}\{h_1, .., h_\ell\} \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$

Segue: lo sp. vett. gen. dagli $\hat{h}_i$ va isomorficamente in $gl(V)$ e allora anche in L_0, cioè vale 1).

2) Dimostriamo che $\mathrm{Span}\{x_1, .., x_\ell, h_1, .., h_\ell, y_1, .., y_\ell\} \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$.

Definiamo $S_j = \mathrm{Span}\{x_j, h_j, y_j\}$, e ricordiamo che in S_j valgono le stesse relaz. di $sl(2)$ con (x_j, h_j, y_j) al posto di (e, h, f). Allora S_j è un quoziente di $sl(2)$, da cui $S_j \cong sl(2)$ opp. $S_j = \{0\}$.
Nel secondo caso avrei $h_j = 0$, ma questo è falso perché $h_1, .., h_\ell$ sono non nulli per la parte 1). Quindi $S_j \cong sl(2)$, e allora $x_1, .., x_\ell, y_1, .., y_\ell$ sono tutti non nulli $(\in L_0)$.

Concludiamo che $x_1, .., x_\ell, h_1, .., h_\ell, y_1, .., y_\ell$ sono linearmente indipendenti: <u>esercizio</u> (si usa che $x_1, .., x_\ell, y_1, .., y_\ell$ sono $ad(H)$-autovettori, e i loro autovalori, che sono elementi di H^*, sono tutti distinti; e si usa anche che $h_1, .., h_\ell$ sono $ad(H)$-autovettori di autovalore nullo, diverso dagli autovalori degli x_i e y_i, e $h_1, .., h_\ell$ sono lin. indipendenti).

Per dimostrare 2) osserviamo l'identità seguente:

$$\Big[h_j, \underbrace{[x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots, [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}]\cdots]}_{\substack{\uparrow \\ \text{elem. di } X}}\Big] = (c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j}) \cdot [x_{i_1}, [x_{i_2},\dots, [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}]\cdots]$$

dimostrazione: esercizio (induzione su t, per $t=1$ è (S3)).

Analogamente per le y, con il coeff. $-(c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j})$.

Inoltre osserviamo anche:

$$[y_j, [x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}]\cdots]] \in X \qquad \text{se } t \geq 2$$

dimostrazione: esercizio (per $t=2$ è (S2)+(S3) e Jacobi,
in generale si fa induzione su t).

Analogamente con „x" e „y" scambiate.

Da queste osservazioni deduciamo: 1) $Y+H+X$ è una sottoalgebra di Lie, e allora $L_0 = Y+H+X$;

2) La somma è diretta, cioè $L_0 = Y \oplus H \oplus X$. Infatti la prima osservazione fornisce una decomposizione di L_0 in autospazi per $ad(H)$, gli $ad(H)$-autovalori degli autovettori in X sono del tipo

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i \qquad \text{con } c_i \geq 0 \text{ interi}$$

e gli $ad(H)$-autovalori degli autovettori in Y sono del tipo

$$\sum_{i=1}^{\ell} -d_i \alpha_i \qquad \text{con } d_i \geq 0 \text{ interi}$$

Infatti $c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j} = \langle \alpha_{i_1}, \alpha_j^\vee \rangle + \dots + \langle \alpha_{i_t}, \alpha_j^\vee \rangle =$

$$= \alpha_{i_1}(\underline{h_j}) + \dots + \alpha_{i_t}(\underline{h_j}) = (\underbrace{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_t}}_{})(\underline{h_j})$$

A questo punto la somma è diretta per l'esercizio di prima. □

Notazione: Definiamo i seguenti elem. di L_0:

$$X_{ij} = ad(X_i)^{-c_{ji}+1}(X_j)$$

$$Y_{ij} = ad(Y_i)^{-c_{ji}+1}(Y_j) \qquad (\text{per } i \neq j)$$

Lemma: In L_0 vale: $ad(X_s)(Y_{ij}) = 0$ $\forall s \in \{1, \dots, l\}$ e $\forall i \neq j$.

e $ad(Y_s)(X_{ij}) = 0$.

Dim.: Supponiamo $s \neq i$, allora $[X_s, Y_i] = 0$, e allora $ad(X_s), ad(Y_i)$ commutano. Quindi

$$ad(X_s)\, ad(Y_i)^{(\dots)}(Y_j) = ad(Y_i)^{-c_{ji}+1} ad(X_s)(Y_j) = \begin{cases} ad(Y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j) & \text{se } s=j \\ 0 & \text{se } s \neq j \end{cases}$$

Sappiamo: $ad(Y_i)(h_j) = c_{ij} Y_i$. Se $c_{ij} = 0$ allora abb. finito, altrimenti $c_{ij} \neq 0$, e allora $c_{ij} < 0$ (perché $i \neq j$)

e allora $-c_{ji} + 1 \geq 2$. In questo caso stiamo calcolando

$$\underbrace{[\overset{\uparrow}{Y_i}, [\overset{\uparrow}{Y_i}, \dots, [\overset{\uparrow}{Y_i}, c_{ij} \overset{\uparrow}{Y_i}]}_{Y_i \text{ compare almeno 2 volte}} \dots] = 0$$

Invece se $s = i$: consid. $\mathrm{Span}\{x_i, h_i, y_i\} \cong \mathfrak{sl}(2)$, e

$$ad(x_i)\, ad(y_i)^m \underset{\uparrow}{(y_j)} = m\,(\underset{\uparrow}{\lambda} + 1 - m)\, ad(y_i)^{m-1}(y_j)$$

è l'$\mathfrak{h}$-peso di y_j, cioè $\lambda = -c_{ji}$

usando la teoria degli $\mathfrak{sl}(2)$-moduli. Questo è $= 0$ se $m = -c_{ji} + 1$.

$\square$

Per la dim. del teorema di Serre:

dato $x \in M$ = algebra di Lie (di dim. qualsiasi), è def. $\exp(ad(x)) \in GL(M)$ se:

1) M ha dim. finita,

2) x è <u>ad-nilpotente</u>, allora $\exp(ad(x)) = \sum_{t=0}^{m} \frac{ad(x)^t}{t!}$

tale che $ad(x)^m = 0$ come elem. di $End(M)$

3) $ad(x) : M \to M$ è <u>localmente</u> <u>nilpotente</u>, cioè

$\forall y \in M$: $ad(x)^m(y) = 0$ per $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ abb. grande.

Anche in questo caso $\exp(ad(x))$ è ben definito, ponendo

$$\exp(ad(x))(y) = \sum_{t=0}^{m} \frac{ad(x)^t}{t!}(y)$$

(qui m è tale che $ad(x)^m(y) = 0$)

<u>Esercizio</u>: Verificare che $\exp(ad(x))$ è un automorfismo di M come algebra di Lie, anche nei casi 2 e 3.

Esempio: Consid. $L = \mathfrak{sl}(2)$, $H = \mathfrak{sl}(2) \cap \mathfrak{h}(2)$, sist. di radici $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

una sola riflessione semplice s_α che scambia α con $-\alpha$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2)$ normalizza H, e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

in un certo senso quindi coniugare con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ „realizza" la riflessione semplice s_α (a meno dell'identificazione che abb. fatto:

$$\begin{array}{l} \alpha \in \Phi \subseteq E = \text{spazio vett. reale} \\ \| \\ \alpha \in H^* \end{array}$$
)

Vogliamo usare $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nella dim. in cui $\mathfrak{sl}(2)$ è dentro un'algebra di dim. anche infinita. Allora realizziamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ come prodotto di esponenziali:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \exp(e) \exp(-f) \exp(e) \qquad ((e, h, f) = \text{base solita di } \mathfrak{sl}(2))$$

$\mathfrak{sl}(2)$ agirà con la rappr aggiunta sull'algebra grande, quindi intanto consid. $\mathfrak{sl}(2)$ che agisce su un modulo V di dim. finita. V è somma diretta di $\mathfrak{sl}(2)$-moduli irriducibili, che sono del tipo

$k[X,Y]_d = \{$pol. omogenei di grado $d\}$, e queste rappres. sono i diff. delle rappr. $k[X,Y]_d$ di $SL(2)$. Cioè V „si integra" a una rappr. di $SL(2)$.

Se $\varphi : SL(2) \to gl(V)$ è la rappr., l'elem. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2)$ viene mandato in $\exp(d\varphi(e)) \exp(-d\varphi(f)) \exp(d\varphi(e)) = \tau$

e abb. $\boxed{\tau \, d\varphi(h) \, \tau^{-1} = -d\varphi(h)}$.

Si vede facilmente: τ manda un autovettore di $d\varphi(h)$ di autovalore λ in un autovettore di autovalore $-\lambda$.

Dim. teorema di Serre

Ric.: abb. definito L_0 = quoziente di $\hat{L}$ per le relaz. (S1), (S2), (S3), avevamo def. gli elem x_{ij}, y_{ij} $(i \neq j)$ in L_0, che realizzano le altre relazioni (S^+_{ij}), (S^-_{ij}).

Def. K = ideale di L_0 generato da x_{ij} e y_{ij} $\forall i \neq j$, $L = \frac{L_0}{K}$.

Ric.: $L_0 = X \oplus H \oplus Y$

Def. I = ideale <u>di X</u> generato da x_{ij} $\forall i \neq j$

J = ideale <u>di Y</u> generato da y_{ij} $\forall i \neq j$

<u>Passo 1</u>: I è anche un'ideale di L_0 e J è anche un'ideale di L_0.

<u>Dim.</u>: Vediamo la dim. per J, quella per I è analoga.

Bracket di elem. di Y con J : sono in J perché J è ideale di Y.

— , —— H con J: l'elem. y_{ij} è $ad(h_s)$-autovettore,

di autovalore $-c_{js} + (c_{ji} - 1)c_{is}$, e $ad(H)(Y) \subseteq Y$

(abbiamo dato una base di Y fatta di autovettori di $ad(H)$).

D'altronde J è span di bracket fra gli elem. y_{ij} e gli elem. di Y, quindi (per Jacobi) anche J ha una base di $ad(H)$-autovettori.

Segue: $ad(H)(J) \subseteq J$.

Infine, i generatori $x_1, .., x_\ell$ di X (come algebra di Lie) soddisfano

$ad(x_s)(y_{ij}) = 0$, da questo segue $[X, J] = 0$ (usando Jacobi).

Segue: J (e anche I) è ideale di L_0.

<u>Passo 2</u>: $K = I + J$

<u>Dim.</u>: Abbiamo: $I \subseteq K$, $J \subseteq K$, e $I+J$ allora è un ideale di L_0 che contiene x_{ij}, y_{ij} $\forall i \neq j$. E' contenuto in K, quindi coincide con K.

<u>Passo 3</u>: $L = N^- \oplus H \oplus N$ (somma diretta di sottosp. vettoriali)

dove $N^- = \frac{Y}{J}$, $N = X/I$.

Dim.:

$$L = \frac{Y \oplus H \oplus X}{J \oplus \{0\} \oplus I = K} = \frac{Y}{J} \oplus \underset{\underset{H}{\shortparallel}}{\frac{H}{\{0\}}} \oplus \frac{X}{I}$$

H, cioè H va isomorficamente dentro L, lo identifichiamo con la sua immagine.

Passo 4: $\mathrm{Span}\{x_1, .., x_\ell, h_1, .., h_\ell, y_1, .., y_\ell\} \subseteq L_0$ va iniettivamente in L.

(denotiamo con x_i, h_i, y_i anche le loro classi in L).

Dim.: come in L_0.

Passo 5: Def. $L_\lambda = \{ x \in L \mid [h, x] = \lambda(h) x \ \forall h \in H \}$ dove $\lambda \in H^*$.

Allora $L_\lambda = H$ se λ = funzionale nullo,

$N = \sum_{\lambda > 0} L_\lambda$, $N^- = \sum_{\lambda < 0} L_\lambda$, ogni L_λ ha dim. finita.

dove $\lambda > 0$ significa: λ è comb. lin. di $\alpha_1, .., \alpha_\ell$ a coeff. ≥ 0, non tutti nulli ($\lambda < 0$ analogo con „≤ 0").

Dim.: Segue dal passo 3 e 4, e dalla decomposizione di X e di Y in $ad(H)$-autospazi. Ogni L_λ ha dim. finita perché gli autovettori di autovalore $\lambda = n_1 \alpha_1 + \dots + n_\ell \alpha_\ell$ sono bracket del tipo

$[x_{i_1}, [x_{i_2}, .., [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}] \dots]]$ dove $i_j = 1$ per n_1 valori di j, $= 2$ per n_2 valori di j, eccetera. Sono in numero finito di autovettori.

Passo 6: $ad(x_i)$, $ad(y_i)$ $\forall i$ sono localmente nilpotenti $(\in End(L))$.

Dim.: Vediamo x_i, per y_i è analogo.

Sappiamo che potenze abbastanza alte di $ad(x_i)$ mandano a 0 gli elem. $x_1, \to x_\ell, h_1, \to h_\ell, y_1, \to y_\ell$

$\nearrow$ sono le relaz. x_{ij}

$\uparrow$ $[h_j, ad(x_i)] =$ multiplo di x_i

$\nwarrow$ $[x_i, y_j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ h_i & \text{se } i = j \end{cases}$, con altre 2 volte va in zero

Sia ora $M \subseteq L$ il sottosp. vettoriale dei vettori dove $ad(x_i)$ (con i fissato) agisce in modo localm. nilpotente.

Ora, se $z, z' \in M$ e $ad(x_i)^m(z) = 0$, $ad(x_i)^{m'}(z') = 0$,

allora $ad(x_i)^{m+m'}([z, z']) = 0$

(deriva dall'uguaglianza già vista $(D - (\alpha+\beta))^m([a,b]) =$

$\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \left[(D-\alpha)^j(a), (D-\beta)^{m-j}(b) \right]$, qui D è una derivazione,

a e b sono elem. di un'algebra di Lie, $\alpha, \beta =$ scalari,

prendo $D = ad(x_i)$, $\alpha = \beta = 0$, $a = z$, $b = z'$).

Deduciamo che M è una sottoalgebra di Lie di L contenente i generatori, quindi $M = L$.

Passo 7: Sono ben definiti gli elem. $\tau_i = \exp(ad(x_i))\exp(-ad(y_i))\exp(ad(x_i))$ e sono automorfismi di L.

Dim.: Segue dal passo 6.

Passo 8: Data $\alpha \in \Delta$, definiamo
$$S_\alpha : H^* \longrightarrow H^*$$
$$\underset{\substack{\Uparrow \\ \Delta}}{\beta} \longmapsto \beta - \underbrace{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}_{\uparrow\text{quelli del sist. di radici } \Phi} \alpha$$

e chiamiamo W il gruppo generato dagli S_α $\quad (W \subseteq GL(H^*))$.

Allora possiamo identificare questi S_α con le riflessioni $E \to E$ del gruppo di Weyl di Φ, e tutto questo W con il gruppo di Weyl di Φ.

Dim.: Identifichiamo ogni radice $\alpha_i \in \Delta$ con l'elem. di H^* che vale $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$ su h_j,

questo ci permette di identificare $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi \, (\subseteq E)$ con un sottospazio $/\mathbb{Q}$ di H^*, che ha la stessa dimensione su $\mathbb{Q}$ di E su $\mathbb{R}$ e anche di H^* su k.

Le „riflessioni" S_α definite su H^*, ristrette a $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Phi$, coincidono con le restrizioni delle riflessioni di E a $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$.

Passo 9: Siano $\lambda, \mu \in H^*$. Se esiste $w \in W$ tale che $w(\lambda) = \mu$, allora $\dim(L_\lambda) = \dim(L_\mu)$.

Dim.: Possiamo supporre $w = s_i$ = rifless. semplice ass. a $\alpha_i \in \Delta$. Usiamo τ_i. Studiamo cosa fa τ_i a spazi del tipo $L_{\lambda + r\alpha_i}$. Vediamo come agiscono $ad(x_i)$ e $ad(y_i)$:

$$ad(x_i)(L_{\lambda+r\alpha_i}) \subseteq L_{\lambda+(r+1)\alpha_i}$$

$$ad(y_i)(L_{\lambda+r\alpha_i}) \subseteq L_{\lambda+(r-1)\alpha_i}$$

Concludiamo: $\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} L_{\lambda+r\alpha_i}$ è stabile per $ad(x_i)$, $ad(y_i)$, quindi le loro potenze, quindi τ_i. Inoltre $ad(x_i)$, $ad(y_i)$ agiscono in modo localmente nilpotente, allora fissiamo $v \in L_\lambda$ e consid. $S_i = \text{Span}\{x_i, h_i, y_i\} \cong sl(2)$ che agisce tramite ad su L. L'$sl(2)$-modulo generato da v ha dimensione finita, e τ_i agisce su questo $sl(2)$-modulo: verifichiamo che τ_i manda v dentro $L_{s_i(\lambda)} = L_\mu$.

Verifica di questo fatto, calcoliamo l'$\underline{H}$-autovalore di $\tau_i v$ (tramite ad). Sappiamo che l'h_j-autovalore di v è $\lambda(h_j)\ \forall j$. Sia $h \in H$, possiamo scrivere $h = a h_i + \tilde{h}$ dove $a \in k$, $\tilde{h} \in \underset{\nwarrow_{\text{in } H}}{ker(\alpha_i)}$, perché $ker(\alpha_i)$ ha codim. 1 in H e non contiene h_i.

$\alpha_i(h_i) = \langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 2$,

$\lambda(h_i) = \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$ perché

$\alpha_j(h_i) = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \ \forall j$

Ora:
$$[h, \tau_i v] = [a h_i + \tilde{h}_i, \tau_i v]$$

Abb.:
$$[h_i, \tau_i v] = -\lambda(h_i)\tau_i v = \left(\lambda(h_i) - 2\,\lambda(h_i)\right)\tau_i v =$$
$$= \left(\lambda(h_i) - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i(h_i)\right)\tau_i v =$$
$$= \underline{\left(\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i\right)}(h_i) \cdot \tau_i v .$$

inoltre
$$[\tilde{h}, \tau_i v] \underset{\uparrow}{=} \tau_i \lambda(\tilde{h}) v = \lambda(\tilde{h}) \tau_i v =$$

perché $\tilde{h}$ commuta con X_i e Y_i

$$= \left(\lambda(\tilde{h}) - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \underbrace{\alpha_i(\tilde{h})}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right)\tau_i v = \underline{\left(\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i\right)}(\tilde{h})\, \tau_i v$$

Segue $\tau_i v \in L_{\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha} = L_{s_i(\lambda)}$

Visto che v è qualsiasi in L_x, abb. $\tau_i(L_\lambda) \subseteq L_\mu$

Passo 10: $\dim(L_{\alpha_i}) = 1 \quad \forall i$,

$\dim(L_{r\alpha_i}) = 0 \qquad$ se $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$

Dim.: In L_0, gli $ad(H)$-autosp. di autovalore $\alpha_1, .., \alpha_\ell$ hanno dim. 1, inoltre vengono mandati iniettivamente in L, quindi $\dim(L_{\alpha_i}) = 1 \quad \forall i$.

In L_0 un $ad(H)$-autospazio di autovalore $r\alpha_i$ (supp. $r>0$)

può essere ottenuto solo con un bracket del tipo

$$\underbrace{[x_i, [x_i, \dots [x_i, x_i]}_{r \text{ volte}} \cdots]]$$

che è $=0$, quindi anche in L vale $L_{r\alpha_i} = \{0\}$.

<u>Passo 11</u>: Data $\alpha \in \Phi$, allora $\dim(L_\alpha) = 1$, e $\dim(L_{r\alpha}) = 0$ se $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$

<u>Dim.</u>: Esiste $w \in W$ tale che $w(\alpha) \in \Delta$, e quindi il passo 11 segue dal passo 9 $\left(\dim(L_\alpha) = \dim(L_{w(\alpha)}) \right)$ e dal passo 10.

<u>Passo 12</u>: Se $L_\lambda \neq \{0\}$ e $\lambda \neq 0$ allora $\lambda \in \Phi$.

<u>Dim.</u>: λ è comb. lin. a coeff. tutti ≥ 0 o tutti ≤ 0 di elem. di Δ.

Se $\lambda \notin \Phi$, allora non è neppure su alcuna retta generata da una radice (per il passo 11).

Segue (<u>esercizio</u>): esiste $w \in W$ tale che $w(\lambda)$ è comb. lineare di elem. di Δ con alcuni coeff. > 0, alcuni coeff. < 0

(sugg.: sappiamo che nella W-orbita di λ c'è un elem. della chiusura della camera fondamentale).

Quindi $L_{w(\lambda)} \neq \{0\}$, ma allora anche $w(\lambda)$ dovrebbe essere comb. lin. degli elem. di Δ a coeff. tutti ≥ 0, oppure tutti ≤ 0: assurdo.

Passo 13: $\dim(L) = \underset{\substack{\shortparallel \\ \dim(H)}}{\ell} + |\Phi|$ quindi L ha dim. finita.

Dim.: Segue dai passi 5, 11, 12.

Passo 14: L è semisemplice.

Dim.: Supp. L non sia semisemplice, cioè $Rad(L) \neq \{0\}$, allora l'ultimo termine non nullo della serie derivata di L è un ideale abeliano $\overset{\neq\{0\}}{I}$ di L. $ad(H)$ è diagonalizzabile su L ($\boxed{L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha}$ è la decomp. in autospazi) e I è stabile per $ad(H)$, quindi $ad(H)$ è diagonalizzabile anche su I, cioè $I = (\underline{H\cap I}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} (\underline{L_\alpha \cap I})$.

Se $I \cap L_\alpha$ ha dim 1, allora prendo x_α, h_α, y_α soliti) $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ deve essere in I, ma x_α e h_α non commutano: assurdo perché I è abeliano.

Segue $I \subseteq H$, se $I \neq \{0\}$ prendo $\alpha_i \in \Delta$ non nulla su un elem. $h \in I$, e $[h, x_i] = \underbrace{\alpha_i(h)}_{\neq 0} \underset{\uparrow}{\boxed{x_i}} \neq 0$, allora $x_i \in I$, ma x_i non commuta con H: assurdo.

Passo 15: H è torale massimale, e Φ è isomorfo al sist. di radici di L rispetto a H.

Dim.: La decomposizione $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ implica che H è abeliana massimale, e quindi è torale massimale.

Calcoliamo il sist. di radici di L risp. a H: si scelgono elem. $x_\alpha \in L_\alpha$ per ogni $\alpha \in \Phi$, in ciascun L_{α_i} scelgo x_i.

A quel punto gli elem. $h_\alpha, y_\alpha \ (\in S_\alpha)$ sono univocam. det., e ottengo h_i per $\alpha_i \in \Delta$, e la matrice di Cartan allora è data da $\alpha_i(h_j)$, che è la stessa di Φ di partenza.

□

Corollario: Se L_1, L_2 sono algebre di Lie semisemplici, con sistemi di radici isomorfi (per qualche scelta di sottoalgebre torali massimali), allora $L_1 \cong L_2$.

Dim.: Sia L ottenuta col teo. di Serre dal sistema di radici.

L_i ha elementi $\underline{x_1^{(i)}, \dots, x_\ell^{(i)}}$, $\underline{h_1^{(i)}, \dots, h_\ell^{(i)}}$, $\underline{y_1^{(i)}, \dots, y_\ell^{(i)}}$ ($\ell = |\underset{\nwarrow \text{base}}{\Delta}|$) che soddisfano le relazioni di Serre.

Inoltre $\mathrm{ad}_{L_i} : L_i \longrightarrow \mathfrak{gl}(L_i)$ è iniettiva, per cui L_i a meno di isomorfismi è contenuta in un'algebra associativa. Quindi per la proprietà universale esistono omom. di algebre di Lie

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ L_1 & & L_2 \end{tikzcd}$$

Sono iniettivi, perché il nucleo di uno di essi dovrebbe essere una somma di addendi semplici di L (questi addendi corrisp. alle comp. connesse del diagr. di Dynkin), ma nessuna va in 0 perché i gen. $x_1^{(i)}, \dots$ sono nonnulli. Inoltre questi generano, quindi $L_1 \cong L \cong L_2$.

$\square$

Quello che manca nella classificazione a questo punto è escludere che algebre di Lie semisemplici con diversi diagr. di Dynkin possano essere isomorfe. Per questo si usa:

<u>Teorema</u>: Siano $H, H' \subseteq L$ sottoalg. torali massimali di L semisemplice, allora $\exists \varphi : L \to L$ automorfismo tale che $\varphi(H) = H'$.

(senza dim.)

<u>Corollario</u>: Φ non dipende dalla scelta di H in L.

<u>Esempi di algebre di tipo A_n, B_n, C_n, D_n</u>

<u>Lemma</u>: Sia $\Phi \subseteq E$ sistema di radici irriducibile. Allora il prodotto scalare $(-,-)$ in E (per cui Φ è un sistema di radici) è univocam. determinato a meno di multipli scalari.

Dim.: Scegliamo una base $\Delta \subseteq \Phi$ (è indip. da $(-,-)$).

Siano $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq -\beta$, e

consid. $E' = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha, \beta\}$, e $\Phi \cap E'$.

Consid. i tre casi sul piano: A_2, C_2, G_2, quali radici sono in $\Phi \cap E'$ dice se α, β sono lunghe uguali, qual è l'angolo fra esse, e il rapporto fra le lunghezze.

Basta riscalare un prodotto scalare rendendo α con la stessa lunghezza rispetto ai due prod. scalari, e allora (α, α), (α, β), (β, β) sono gli stessi per entrambi i prodotti scalari.

Per concludere basta osservare che il diagr di Dynkin è connesso, quindi parto da $\alpha \in \Delta$ qualsiasi, riscalo in modo che le due lunghezze di α siano uguali, e procedendo con radici semplici una adiacente all'altra ottengo che i prod. scalari sono uguali.

$\square$

Oss.: Se Φ non è irriducibile, allora l'unica differenza possibile fra prodotti scalari che lo rendono un sist. di radici è un riscalaggio su ciascuna componente irriducibile. Quindi se $\Phi \subseteq E$ è un sist. di radici per due prodotti scalari su E, cioè formalmente sono due sist. di radici, allora sono isomorfi.

Corollario: Siano $\Phi \subseteq E$, $\Phi' \subseteq E'$ sist. di radici in spazi euclidei.

$$\Phi \cong \Phi' \iff \exists \text{ isom. lineare } E \xrightarrow{T} E' \text{ tale che } T(\Phi) = \Phi'$$

Dim.: ($\Rightarrow$ ovvio)

$\Leftarrow$ Identifico Φ con Φ': è un sist. di radici per il prodotto scalare di E trasferito su E' tramite T. Segue che $\Phi \cong \Phi'$. $\square$

Esempio: Quindi i prodotti scalari che abb. dato per calcolare i sist. di radici di $\mathfrak{sl}(n+1)$ (di tipo A_n), $\mathfrak{so}(2n+1)$ (B_n), $\mathfrak{sp}(2n)$ (C_n) e $\mathfrak{so}(2n)$ (D_n) sono multipli scalari della forma di Killing.

Proposizione: Sia L algebra di Lie di dim. finita, $H \subseteq L$ abeliana

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha \qquad (L_\alpha \text{: } ad(H) \text{ autospazio})$$

con:

1) $\dim(L_\alpha) \leq 1 \quad \forall \alpha \in H^* \setminus \{0\}$

sia $\Phi = \{\alpha \in H^* \setminus \{0\} \mid L_\alpha \neq \{0\}\}$

2) Sia $E_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) (\subseteq H^*)$, $\quad E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$, $\dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_k(H)$

Supp esista un prodotto scalare su E che rende Φ un sist. di radici.

3) Scelta una base $\Delta \subseteq \Phi$, $\Delta = \{\alpha_1, .., \alpha_\ell\}$, supp. esistano $\underline{h_1, .., h_\ell} \in H$, tali che $\alpha_i(h_j) = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \quad \forall i, j$

e tali che $h_i \in [L_{\alpha_i}, L_{-\alpha_i}] \quad \forall i$.

Allora L è semisemplice, H è torale massimale, con sist. di radici Φ.

Dim.: Scelgo elem. $x_1, \dots, x_\ell \in L$, $y_1, \dots, y_\ell \in L$ con $\underline{x_i \in L_{\alpha_i}}$, $\underline{y_i \in L_{-\alpha_i}}$, $\underbrace{[x_i, y_i] = h_i}$,

A questo punto gli elem. $x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell$ soddisfano le relaz. di Serre, perché $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$.

↑ facile, usa solo Jacobi

Allora esiste un omom. $\varphi: M \longrightarrow L$ dove M è semisemplice di sist. di radici Φ. φ è suriettivo, perché nella sua immagine c'è H e tutti gli L_α, poi nessun addendo semplice di M va in zero (perché la m. di Cartan è invertibile, Δ è una base, e segue: $h_1, \dots, h_\ell$ sono lin. indipendenti, e allora x_i, y_i sono non nulli), cioè φ è un isom. che manda una sottoalg. torale max. di M su H.

□

Complementi

Algebra universale inviluppante

Problema: Data un'algebra di Lie L, esiste A algebra associativa tale che $A \supseteq L$?

Teorema (Ado): Se L ha dim. finita, allora esiste A di dimensione finita. Altra formulazione: L è isomorfa a una sottoalg. di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$ per qualche n.

(dim.: difficile)

Se non si richiede A di dim. finita, allora A esiste sempre, grazie al Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt.

Sia L algebra di Lie qualsiasi, consid. $T(L)$ = algebra tensoriale su L. E' un'algebra associativa e contiene il sottosp. vett. L, ma L non è una sottoalgebra di Lie, infatti dati $x, y \in L$, il bracket in $T(L)$ è $x \otimes y - y \otimes x$, non appartiene a L (se x, y lin. indipendenti).

Sia I l'ideale di $T(L)$ generato dagli elem.

$$\underbrace{x \otimes y - y \otimes x}_{\in L \otimes L} - \underbrace{[x, y]}_{\in L} \qquad (\forall x, y \in L)$$

<u>Def</u>: L'<u>algebra universale inviluppante</u> di L è $\mathcal{U}(L) = \dfrac{T(L)}{I}$.

Vorrei dire: ora L è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{U}(L)$. Però non è ovvio, possiamo dire: l'applicazione naturale $L \longrightarrow \mathcal{U}(L)$ (data da $x \longmapsto [x] \bmod I$) è un omomorfismo di algebre di Lie.

Problema: è iniettiva? Sì, deriva da:

<u>Teorema</u> (PBW): Consid. una base $(x_1, \ldots)$ di L ordinata (qualsiasi cardinalità!) allora $\mathcal{U}(L)$ ha base formata dai vettori 1, e prodotti del tipo $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ con $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m$ (qui $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = [x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_m}]$)

per qualsiasi $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e qualsiasi scelta di indici.

(senza dim.)

<u>Corollario</u>: L'applicaz. naturale $L \longrightarrow \mathcal{U}(L)$ è iniettiva.

<u>Corollario</u>: Sia $L(x_1, .., x_n)$ l'algebra di Lie libera in generatori $x_1, .., x_n$, e M un'algebra di Lie. Fissati $y_1, .., y_n \in M$, esiste un'unico omom. $\varphi: L(x_1, .., x_n) \longrightarrow M$ tale che $\varphi(x_i) = y_i \; \forall i$.

(Versione più naturale della proprietà universale di $L(x_1, .., x_n)$.)

<u>Dim.</u>: Sappiamo che il corollario vale se M è contenuta in un'algebra associativa, e lo è perchè $M \subseteq \mathcal{U}(M)$ a meno di isom.. $\square$

<u>Esempi di sottoalgebre di Lie di L semisemplice</u>

Sia L semisemplice, le sottoalgebre di Lie proprie massimali <u>si distinguono</u>* in due classi:

(*: non è banale dimostrarlo)

1) Sottoalgebre paraboliche

2) Sottoalgebre semisemplici ($\leftarrow$ sono classificate con liste esplicite per ogni tipo)

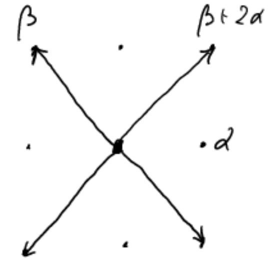
Vediamo le sottoalgebre paraboliche. Si tratta di sottoalgebre di Lie che contengono H. In generale, una sottoalgebra contenente H è del tipo:

$$H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Psi} L_\alpha \qquad\qquad \text{dove } \Psi\subseteq\Phi$$

e $\Psi\cup\{0\}$ dev'essere chiuso rispetto alla somma (cioè se $\alpha,\beta\in\Psi\cup\{0\}$ e $\alpha+\beta\in\Phi\cup\{0\}$, allora $\alpha+\beta\in\Psi\cup\{0\}$).

Es.: $\Psi=\{\alpha,-\alpha\}$ $\forall\alpha\in\Phi$ ha questa proprietà, e la sottoalgebra è $H+S_\alpha$.

In C_2:



la sottoalgebra è $H+S_\beta+S_{\beta+2\alpha}$

Un modo di def. Ψ con questa proprietà è scegliere $\gamma\in E\setminus\{0\}$ (non necess. regolare) e porre

$$\Psi=\{\alpha\in\Phi \mid (\alpha,\gamma)\geq 0\}$$

Si ottiene una sottoalgebra detta parabolica:

$$P = \underbrace{H\oplus\Bigg(\bigoplus_{\underset{\overset{\uparrow}{\Phi}}{\alpha}\,|\,(\alpha,\gamma)=0} L_\alpha\Bigg)}\oplus\underbrace{\Bigg(\bigoplus_{\substack{\beta\in\Phi\,|\\(\beta,\gamma)>0}} L_\beta\Bigg)}_{U}$$

è una sottoalgebra.

Anche la somma dei primi due addendi è una sottoalgebra di L, e anche il terzo addendo (<u>senza H</u>!) è una sottoalgebra U di L e anche di P.

Inoltre U è un <u>ideale</u> di P.

<u>Esercizio:</u> <u>Descrivere</u> P per $sl(l+1)$ dove γ è dato in questo modo:

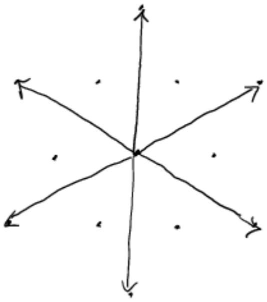
Si sceglie un sottoinsieme $\Delta' \subseteq \Delta$, si ponga $(\gamma, \alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \underline{\Delta'}$, e $(\gamma, \alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta \setminus \Delta'$.

(con questa scelta, $\{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \gamma) = 0\} = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha$ è comb. lineare di <u>soli elem.</u> di $\Delta'\}$, e $\{\beta \in \Phi \mid (\beta, \gamma) > 0\} = \{\beta \in \Phi^+ \mid \beta$ è comb. lineare non di soli elem. di $\Delta'\}$)

(Le sottoalgebre P vengono „a blocchi", descrivere i blocchi in termini di Δ'!)

Riguardo alle sottoalgebre semisemplici

Se M semisemplice ha diagramma di Dynkin contenuto in quello di L semisemplice, allora c'è un omom. iniettivo $M \longrightarrow L$ (manda i gen. di Serre di M in alcuni di quelli di L). Ma non tutte le inclusioni $M \subseteq L$ sono date da sottodiagrammi del diag. di Dynkin. Ad es. se L è di tipo G_2:



$\Psi = \{\text{radici lunghe}\}$

fornisce

$$M = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} L_\alpha$$

una sottoalgebra di tipo A_2 dentro L

ma A_2 non è un sottodiagramma di G_2.

Altri esempi vengono da so e sp, corrisp. alla scelta di un sottosp. $V \subseteq \mathbb{C}^n$ dove la forma è non degenere, e alla decomp. $\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$. Ottengo:

$$so(2a) \oplus so(2b) \subseteq so(2(a+b)) = L \qquad (2a = \dim V)$$

$$so(2a+1) \oplus so(2b) \subseteq so(2(a+b)+1) = L$$

$$sp(2a) \oplus sp(2b) \subseteq sp(2(a+b)) = L$$

(sono tutte sottoalg. contenenti H)